GEPAM
Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática

ORGANIZADORAS
Dra. Rosilene Beatriz Machado
Dra. Janine Soares de Oliveira

Coleção
FOR
MA
TEMÁTICA

MATEMÁTICA EM ESTUDO

TRIGONOMETRIA

1

Editora Arara Azul

“Este texto foi escrito a partir do estudo de materiais específicos sobre trigonometria, de livros didáticos, bem como de nossas experiências com o ensino deste tema. Optamos por não apresentar demonstrações de teoremas ou leis matemáticas, assim como optamos por focar tão somente em uma discussão conceitual, sem ênfase na resolução de exercícios.(...) Com isto, é nosso intuito que este material possa servir como material de apoio e estudo a tradutores e intérpretes de Libras e a professores que ensinam matemática no trabalho com conceitos trigonométricos em suas aulas.

Mas também, que possa servir como um rico material de estudo a estudantes de matemática ou qualquer pessoa que deseje aventurar-se por esse tema.”

Apoio:

PPGECT

UFSC

9 788584 120222

Organizadoras
Dra. Rosilene Beatriz Machado
Dra. Janine Soares de Oliveira

Coleção FOR MA TEMÁTICA

MATEMÁTICA EM ESTUDO

1

TRIGONOMETRIA

Produção editorial
EDITORA ARARA AZUL

Rua A, Condomínio Vale da União, casa 20
25725-055 – Araras, Petrópolis – RJ
Cel/WhatsApp: (24) 98828-2148
E-mail: eaa@editora-arara-azul.com.br
www.editora-arara-azul.com.br

Gerência de produção
Clélia Regina Ramos
Karine de Fátima Ribeiro da Cruz

Projeto gráfico de capa e miolo
Gleide Ferraz

Editoração eletrônica
Gleide Ferraz

Revisão
Fátima Cristina Kneipp Borde
Rosilene Beatriz Machado

Participação na elaboração do texto-base
Dulcilene Freitas Palheta
Lara Lopes de Miranda

Ilustração de miolo
Dulcilene Freitas Palheta

Apoio:

PPGECT UFSC

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Trigonometria [livro eletrônico] / organização Rosilene Beatriz Machado, Janine Soares de Oliveira. -- Petrópolis, RJ : Editora Arara Azul, 2022. – (Coleção for-ma-temática : matemática em estudo ; 1)
PDF

ISBN 978-85-8412-038-3

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Trigonometria - Estudo e ensino I. Machado, Rosilene Beatriz. II. Oliveira, Janine Soares de. III. Série.

22–102556 CDD – 516.24

APRESENTAÇÃO

Este é o primeiro volume da Coleção FOR-MA-TEMÁTICA: Matemática em Estudo, elaborado pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática – Gepam/UFSC (gepam.ufsc.br), no âmbito de dois projetos em desenvolvimento: O projeto de pesquisa "Na vibração com a alteridade surda, o que pode a Matemática?" e o projeto de extensão "Por uma Matemática Surda: ensino de Matemática em Libras".

O grupo tem por objetivo produzir estudos e pesquisas que problematizam as relações entre alteridade e educação matemática. É liderado pelas professoras doutoras Rosilene Beatriz Machado e Janine Soares de Oliveira, e conta com a participação de alunos de graduação em Matemática e graduação em Letras-Libras, alunos de pós-graduação, professores que ensinam Matemática, Física, Química e também tradutores e intérpretes de Libras.

Neste material, apresentamos em versão bilíngue Português-Libras alguns dos principais conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de trigonometria presentes no currículo de Matemática, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Assim, no decorrer das páginas que seguem, o leitor encontrará uma **discussão conceitual** sobre: ângulo, triângulo; razões trigonométricas no triângulo retângulo; círculo e circunferência; circunferência trigonométrica; seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico; e razões trigonométricas em triângulos quaisquer.

Este texto foi escrito a partir do estudo de materiais específicos sobre trigonometria, de livros didáticos, bem como de nossas experiências com o ensino deste tema. Optamos por não apresentar demonstrações de teoremas ou leis matemáticas, assim como optamos por focar tão somente em uma discussão conceitual, sem ênfase na resolução de exercícios. Se o leitor tiver curiosidade, poderá encontrar facilmente, tanto as demonstrações quanto a resolução de exercícios relacionados à trigonometria, em sites de internet especializados ou livros de Matemática.

Além disso, por ser tratar de um material elaborado a partir de projetos que propõem dialogar com intérpretes de Libras e estabelecer uma interlocução com esses profissionais e demais interessados na educação de pessoas surdas, acreditamos ser importante disponibilizar também uma versão em Libras. As escolhas tradutórias se fundamentam na experiência da tradutora a partir de sua formação em Matemática e sua experiência em projetos de tradução para Libras, contando ainda com a parceria de revisão de um tradutor experiente. Assim, não temos intenção de impor ou mesmo propor qualquer padronização de sinais mas sim, contribuir para a reflexão sobre a construção do discurso matemático em Libras.

Com isto, é nosso intuito que este material possa servir como material de apoio e estudo a tradutores e intérpretes de Libras e a professores que ensinam Matemática no trabalho com conceitos trigonométricos em suas aulas. Mas, também, que possa servir como um rico material de estudo a estudantes de Matemática ou qualquer pessoa que deseje aventurar-se por esse tema.

Desejamos uma boa leitura!

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todos os integrantes do Gepam que durante o ano de 2021 se dedicaram intensamente nas reuniões do grupo à discussão sobre os conceitos aqui apresentados, contribuindo com sugestões e correções no texto. Muito obrigada, Dulcilene Freitas Palheta, Elídio Louzada Gomes Júnior, Lara Lopes de Miranda, Gabriela Jacoby Rodrigues, Getulio Pinto da Rosa, Lidiane Camini, Rafael Rossi Viégas e Ramon Santos de Almeida Linhares pelo apoio na realização deste projeto!

Agradecemos, especialmente, à Dulcilene Freitas Palheta e Lara Lopes de Miranda que realizaram a escrita preliminar deste material[1], como parte das atividades e estudos relativos às suas pesquisas então em andamento, sob a orientação das professoras líderes do Gepam.

---

[1] A redação final e a revisão do texto foram realizadas pela Profa. Rosilene Beatriz Machado.

Em particular, agradecemos imensamente à Dulcilene Freitas Palheta, que cuidadosamente responsabilizou-se por toda a produção e edição das figuras e tabelas aqui apresentadas.

Por fim, expressamos nossos agradecimentos ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT-UFSC) pelo apoio a esta proposta, tornando possível sua publicação.

Rosilene Beatriz Machado e
Janine Soares de Oliveira.

SUMÁRIO

Do que trata a trigonometria?

A trigonometria é uma área da Matemática que trata do estudo de triângulos. Mais especificamente, estuda as relações entre as medidas de lados e ângulos de um triângulo.

Historicamente, os saberes em trigonometria desenvolveram-se, principalmente, devido a problemas relacionados ao cálculo de grandes distâncias, no ramo da astronomia, agrimensura e navegação oceânica.

Com esses saberes podia-se determinar a posição e o movimento de corpos celestes e determinar as estações do ano, ou as coordenadas (latitude e longitude) de um ponto na superfície terrestre, tal como um navio, por exemplo. Também, calcular a largura de rios, a altura de montanhas e até mesmo de pirâmides. No Egito Antigo, por exemplo, acredita-se que a altura de uma pirâmide era medida comparando-se sua sombra à sombra de uma pequena haste vertical, a partir de conceitos trigonométricos.

Foi também a partir de conhecimentos trigonométricos que se acredita que Eratóstenes de Cirene (276 a.C. – 194 a.C.), um astrônomo e bibliotecário grego, tenha concluído que a circunferência do nosso planeta teria, aproximadamente, 39.300 km de comprimento. Um feito impressionante! Atualmente, com todo o aparato tecnológico de que dispomos, sabemos que a medida da circunferência da Terra, na linha do Equador, é de 40.075 km.

Nos dias de hoje, os conhecimentos trigonométricos estão na base do desenvolvimento de importantes instrumentos tecnológicos, tais como o sistema de localização por GPS (Global Positioning System); ou o teodolito eletrônico, utilizado para medir ângulos com precisão; ou ainda, o distanciômetro eletrônico, equipamento empregado em levantamentos topográficos para estabelecer distâncias. Esses aparelhos são utilizados em diversos setores: na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.

Interessante, não é? Vamos agora ao estudo dos conceitos!

Ângulo

Um dos conceitos mais elementares no estudo de trigonometria é o conceito de ângulo. Um ângulo é originado de duas semirretas que partem de um mesmo ponto (ou origem), chamado de vértice. O ângulo pode ser interno às semirretas ou externo a elas. Em outras palavras, duas semirretas de mesma origem sempre delimitam dois ângulos, um ângulo interno e um ângulo externo.[2]

Você vai encontrar nos mais diversos materiais referência a ângulo ora como uma região, ora como uma abertura, ora como uma inclinação. Não se preocupe! Todas essas possibilidades estão corretas!

[2] Por convenção, nas situações em que a palavra ângulo aparecer "sozinha", desacompanhada das palavras interno ou externo, o ângulo de que se estará tratando será o ângulo interno.

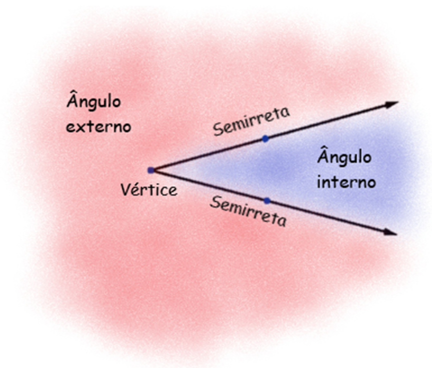


Figura 01: Ilustração do conceito de ângulo.

O relógio com ponteiros (analógico) ilustra muito bem a ideia de ângulo. Observe abaixo:

Figura 02: Relógio analógico.

Imaginando os ponteiros como semirretas e o centro do relógio como o vértice, ficam delimitados no relógio dois ângulos, um ângulo interno aos ponteiros (na cor rosa), e um ângulo externo aos ponteiros (na cor azul):

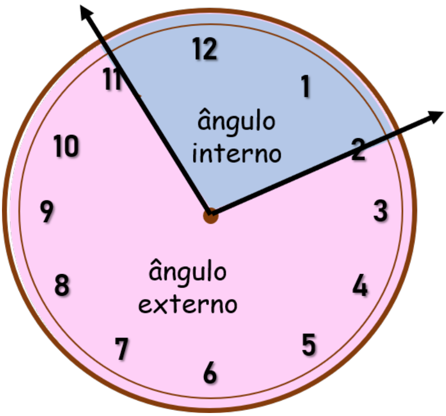


Figura 03: Ilustração de ângulo interno e externo no relógio analógico.

Um ângulo geralmente é representado graficamente por um arco, disposto próximo ao vértice, ligando as duas semirretas. Observe as figuras abaixo:

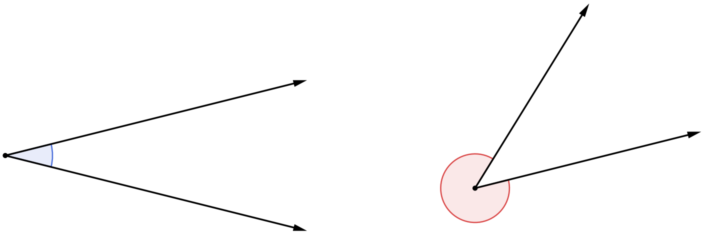


Figura 04: Representação de ângulos.

Mas atenção! Essa representação pode induzir ao equívoco de se considerar que o ângulo seja a região delimitada pelo arco nas figuras. Não é isso! Lembre-se: o arco é apenas uma representação, um indicativo dos ângulos que estão sendo considerados. O ângulo é tudo que fica delimitado (ou internamente, ou externamente) pelas semirretas que o formam, independentemente de onde esteja indicada sua representação gráfica.

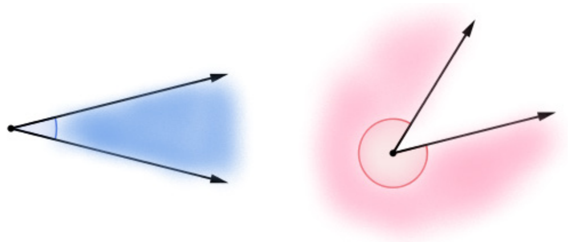


Figura 05: Ângulo interno e ângulo externo.

Os ângulos podem também ser nomeados. Para tanto, é usual utilizar letras gregas, tais como α(*alpha*), β(*beta*), γ(*gamma*), ε(*epsilon*), etc.

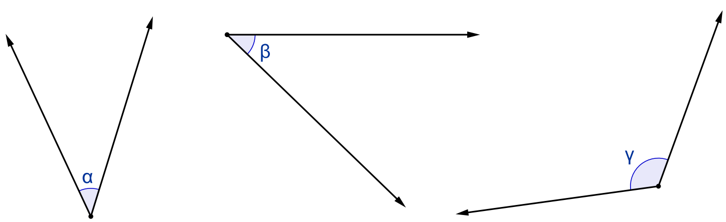


Figura 06: Ângulos nomeados com letras gregas.

Um ângulo pode ainda ser medido. Geralmente, essa medida é expressa em uma unidade de medida chamada grau[3]. Muito provavelmente você já ouviu expressões do tipo: "um ângulo de 40 graus"; ou "uma inclinação de 30

[3] Grau aqui é uma unidade de medida de ângulo! Não se trata do mesmo grau usado para medir temperaturas, que é o grau célsius!

graus"; ou "uma abertura de 60 graus"; ou "um giro de 180 graus". Todas essas expressões referem-se a medidas de ângulos.

Quando medimos um ângulo, então, estamos medindo sua "abertura", ou, dito de outro modo, a "inclinação", ou o "giro" entre suas semirretas. O instrumento de medida utilizado para medir ângulos é o transferidor, uma régua em formato de círculo, tal como na figura a seguir:

Figura 07: Transferidor.

Importante lembrar aqui que **medir nada mais é do que comparar.** Ou seja, sempre que medimos algo estamos comparando aquilo que está sendo medido com algo tomado como uma unidade de medida, de comparação. Essa comparação, em geral, é determinada por meio de algum instrumento de medida, de acordo com a natureza daquilo que se quer medir.

Por exemplo, quando medimos um segmento de reta, é comum utilizarmos a régua, ou a fita métrica, ou a trena como instrumento de medida. Nesse caso, esses instrumentos são graduados em submúltiplos do metro (que é uma unidade de medida linear padrão no Sistema Internacional de Medidas). Assim, quando medimos a altura de uma parede, por exemplo, utilizando uma fita métrica, e dizemos que a parede tem 3 metros de altura, significa que naquela altura "cabem" três pedaços de fita de comprimento 1 metro.

Talvez você esteja se perguntando por que um ângulo não é medido utilizando-se uma régua convencional (reta). Lembre-se de que medir um ângulo é medir a "abertura", ou "inclinação", ou o "giro" de suas semirretas. É por isso que se utiliza uma régua circular, pois nela é possível posicionar o ângulo a ser medido e definir o valor de sua abertura. Observe nas imagens abaixo um ângulo de medida 70 graus e outro de medida 237 graus, dispostos em um transferidor:

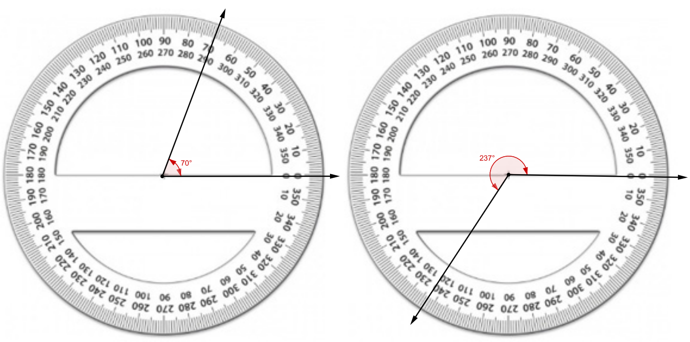
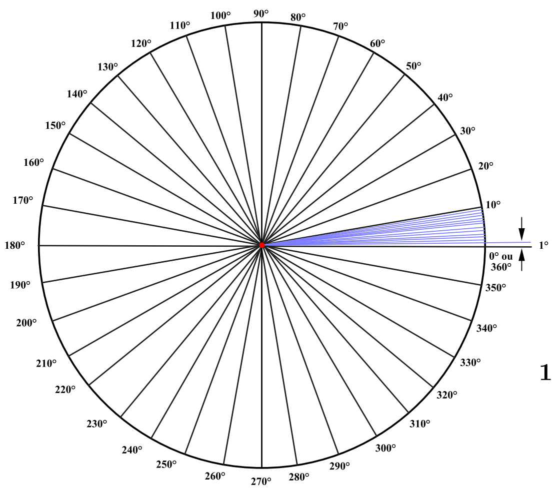


Figura 08: Um ângulo de 70° e outro ângulo de 237° no transferidor.

Para medir um ângulo qualquer no transferidor, posiciona-se o vértice do ângulo no centro do transferidor e uma de suas semirretas na indicação 0 graus. A partir disso, contam-se quantos graus de “abertura” há entre as duas semirretas que formam o ângulo. Quando medimos um ângulo, tomando o grau como unidade de medida, estamos procurando saber, portanto, quantos graus “cabem” nessa “abertura” do ângulo em questão.

Mas o que é o grau, então? Essa unidade de medida de ângulo, comumente indicada pelo símbolo °, é oriunda da divisão da circunferência em 360 partes iguais. Ou seja, um grau é uma das 360 partes iguais em que a circunferência é dividida. É por isso que dizemos que uma circunferência mede 360 graus; ou que um “giro completo”, ou uma “volta completa” mede 360 graus.



$$1° = \frac{1}{360}$$

Figura 09: Ângulo de medida 1°.

Vale dizer que essa divisão da circunferência em 360 partes para a determinação do grau é arbitrária, convencionada, poderia ser qualquer outra. É uma herança histórica de povos egípcios e árabes, a partir da suposição de que o sol realizava uma volta completa, em órbita circular, em torno da Terra em 360 dias.[4] Logo, cada dia representava uma parcela desse percurso, ou seja, cada dia equivaleria a um 1° do percurso, completando em um ano 360°.

Para encerrarmos nossa discussão sobre ângulos nesse primeiro momento, é importante saber ainda que, de acordo com a sua medida, os ângulos podem ser classificados de três formas.

Um ângulo que mede exatamente 90° é chamado de **ângulo reto**. É possível associá-los a "cantos" ou "quinas". O ângulo reto é comumente representado graficamente tal como apresentado nas figuras abaixo:

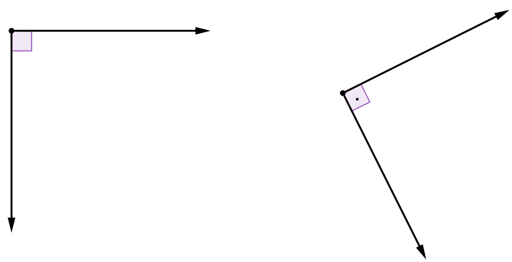


Figura 10: Representação de ângulo reto.

[4] Ressalte-se que essa é uma concepção comprovadamente equivocada, refutada pela teoria heliocêntrica. É a Terra que realiza uma volta completa em torno do sol, em órbita elíptica, em 365 dias. Ainda assim, como indicado, a divisão da circunferência em 360 partes para determinação do grau mantém-se como uma convenção e uma herança histórica.

Quando temos um ângulo menor do que o ângulo reto, cuja medida é maior que 0° e menor que 90° (um ângulo “fechado”), ele é chamado de **ângulo agudo**:

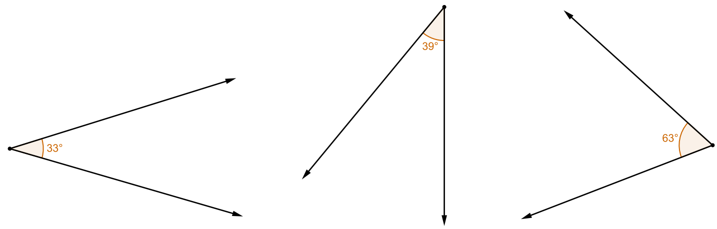


Figura 11: Exemplos de ângulos agudos.

E, por fim, um ângulo maior do que o ângulo reto, cuja medida é maior que 90° e menor que 180° (um ângulo “aberto”), é chamado de **ângulo obtuso**:

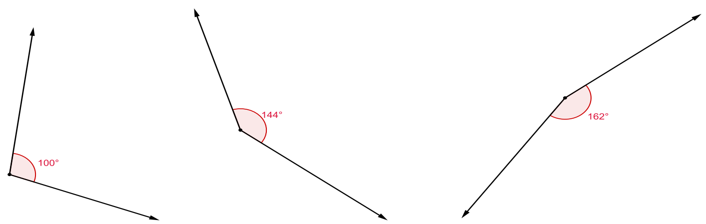


Figura 12: Exemplos de ângulos obtusos.

Triângulo

Agora que já sabemos o que é um ângulo, podemos tratar de outro conceito fundamental em trigonometria: **o triângulo.**

O triângulo é uma figura geométrica fechada (um polígono), formada por **três lados**, tal como nos exemplos abaixo:

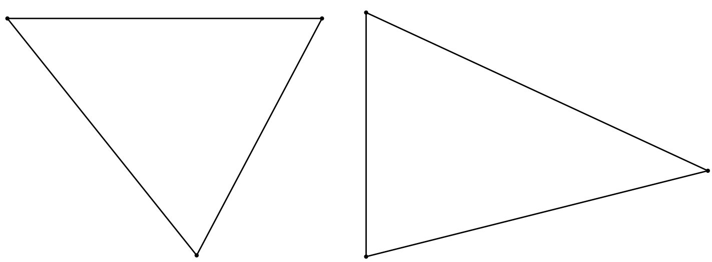


Figura 13: Exemplos de triângulos.

Os lados de um polígono são sempre segmentos de reta. O ponto de encontro entre dois lados de um polígono é chamado de vértice e é representado por uma letra maiúscula. Os lados são comumente denotados pelos nomes dos vértices de suas extremidades (lado AB, lado BC, etc.); ou, então, por meio de letras minúsculas de nosso alfabeto (lado a, lado b, etc.).

Assim, o triângulo é formado por três lados e possui três vértices. Geralmente, nomeamos um triângulo a partir das letras que representam seus vértices. No exemplo abaixo, podemos chamar os triângulos de: triângulo ABC e triângulo EFM.

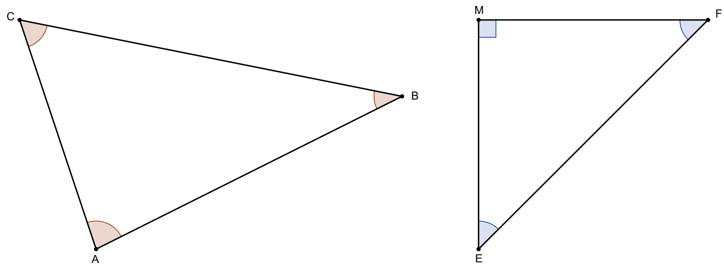


Figura 14: Triângulos com a indicação dos vértices.

Como é possível perceber nos exemplos, dois lados do triângulo determinam um ângulo. Na verdade, dois de seus lados sempre determinam um ângulo interno e um ângulo externo. Isso acontece em qualquer polígono. Os ângulos internos são os ângulos internos do polígono, e os ângulos externos são os ângulos externos do polígono.

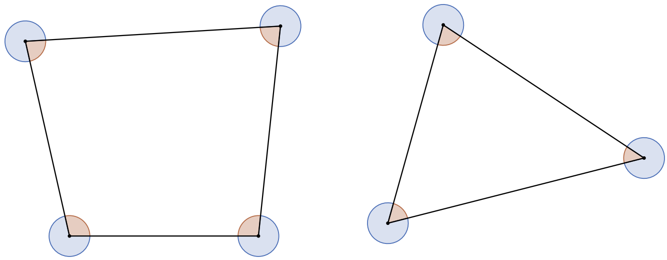


Figura 15: Ângulos externos e internos em polígonos.

Logo, em um triângulo sempre temos três ângulos internos e três ângulos externos. Além do uso de letras gregas para dar nome a ângulos (assim como indicamos na seção anterior), pode-se denotar os ângulos de um triângulo (ou de qualquer polígono) pela letra correspondente ao seu vértice sobreposta por um acento circunflexo. Em um triângulo de vértices KLM, por exemplo, podemos denotar os ângulos por $\hat{K}$, $\hat{L}$ e $\hat{M}$.[5]

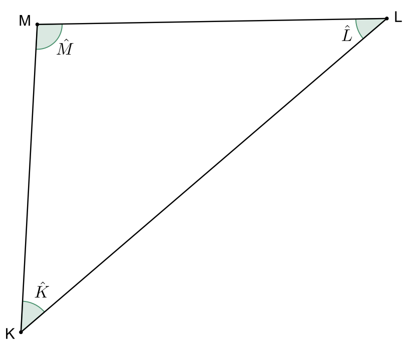
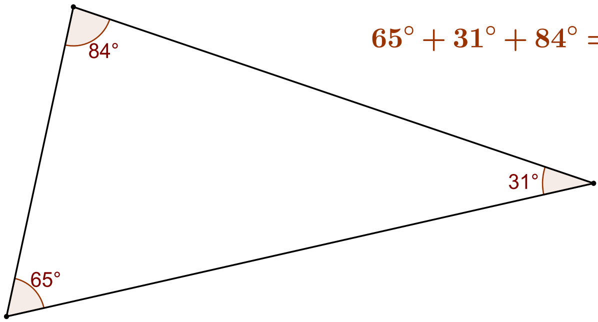


Figura 16: Triângulo KLM e seus ângulos internos.

[5] Podemos também denotar os ângulos externos por $\hat{K}$, $\hat{L}$ e $\hat{M}$. Mas, nesse caso, para não haver confusão, há que se fazer a indicação: ângulo externo $\hat{K}$, ângulo externo $\hat{L}$, ângulo externo $\hat{M}$.

Além disso, **a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo é sempre 180°**. Por exemplo, se um dos ângulos internos de um triângulo mede 84° e outro de seus ângulos internos mede 65°, então seu terceiro ângulo interno, necessariamente, medirá 31°, já que a soma desses três ângulos deve medir 180°.



$$65^\circ + 31^\circ + 84^\circ = 180^\circ$$

Figura 17: Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Mas não é só isso! Os triângulos podem receber nomes específicos, a depender da medida dos seus ângulos internos. Um triângulo bastante conhecido é o **triângulo retângulo**. Você provavelmente já ouviu falar dele! O triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto dentre seus ângulos internos. Destacamos alguns triângulos retângulos abaixo:

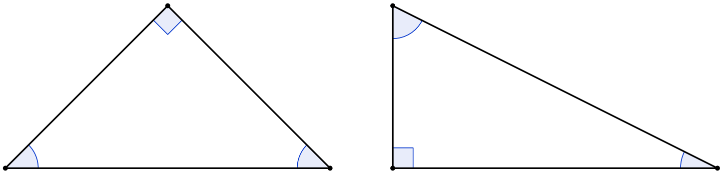


Figura 18: Exemplos de triângulos retângulos.

Perceba que em um triângulo retângulo o ângulo reto sempre está destacado com sua representação gráfica usual. Você geralmente encontrará triângulos retângulos representados graficamente dessa forma.

Além disso, como um triângulo retângulo sempre possui um ângulo reto (90°), e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°, temos que os dois outros ângulos internos de um triângulo retângulo sempre são menores do que 90°. Ou seja, **todo triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos**.

Outra característica importante dos triângulos retângulos é que seus lados possuem nomes especiais, são chamados de **hipotenusa** e **catetos**.

A hipotenusa é sempre o lado oposto ao ângulo reto, ou seja, o lado que está à frente do ângulo reto. A hipotenusa é também o maior lado de um triângulo retângulo. Os outros dois lados, por sua vez, são chamados de catetos. Os catetos são sempre os lados que formam o ângulo reto.

Nas figuras abaixo destacamos a hipotenusa e os catetos em alguns triângulos retângulos:

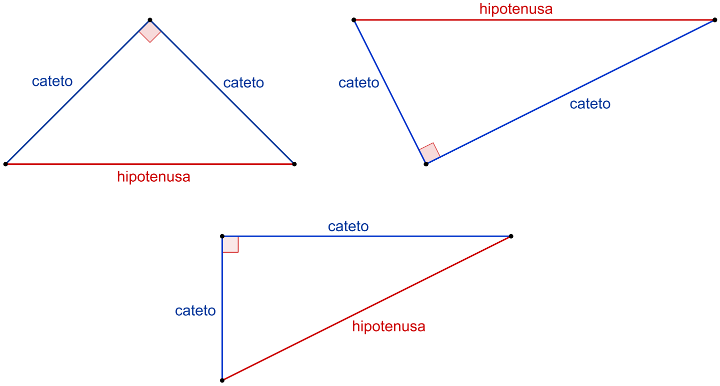


Figura 19: Hipotenusa e catetos de triângulos retângulos.

Os catetos podem ainda ser nomeados, ao considerarmos um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. Nesse caso, os catetos se distinguem entre **cateto oposto** e **cateto adjacente**.

Observe a figura abaixo:

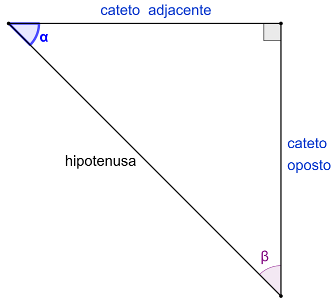


Figura 20: Cateto oposto e cateto adjacente em relação ao ângulo alpha.

Considerando o ângulo α, o cateto que se encontra à sua frente é chamado de cateto oposto. Já o cateto que está ao seu lado é chamado de cateto adjacente. Veja que se considerarmos o ângulo β, no entanto, os catetos oposto e adjacente se invertem:

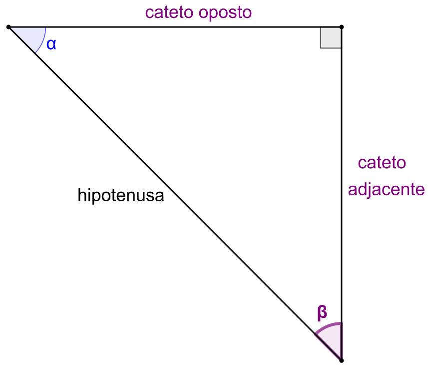


Figura 21: Cateto oposto e cateto adjacente em relação ao ângulo beta.

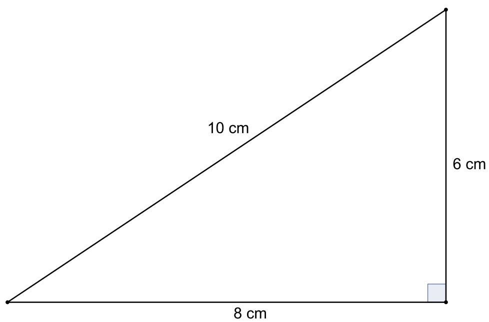
Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas

Com os conceitos de ângulo e triângulo, podemos entrar, a partir de agora, nos estudos mais específicos de trigonometria. Você se lembra do que dissemos lá no início sobre do que trata a trigonometria? É preciso sempre ter isso em mente: **a trigonometria estuda as relações entre as medidas de lados e ângulos de um triângulo.** E esse estudo se dá estabelecendo-se tais relações a partir do triângulo retângulo.

Em um triângulo retângulo é possível estabelecer **seis razões trigonométricas**, considerando-se seus lados. Certamente você está se perguntando: Como assim, razões trigonométricas? Calma, já vamos entender melhor o que significa isso.

Quando estabelecemos uma divisão entre duas quantidades ou duas grandezas (grandeza é tudo aquilo que pode ser medido), estamos comparando-as entre si, tomando uma delas como unidade de comparação. Ou seja, estamos dizendo "quantas vezes uma cabe na outra" ou, em outras palavras, “quanto uma é maior ou menor do que a outra”. O número expresso por essa divisão (o resultado da operação) chamamos de razão. Nesse sentido, dizer que "seis dividido por dois é três", por exemplo, significa dizer que "seis é três vezes maior do que dois", ou ainda, que "seis é o triplo de dois". Ou seja, a razão entre seis e dois é três!

Logo, quando dizemos que em um triângulo retângulo é possível estabelecer razões trigonométricas, considerando-se seus lados, isso significa que é possível estabelecer razões (divisões) entre as medidas de seus lados. Por exemplo, na figura abaixo, temos um triângulo retângulo com lados medindo 10 cm, 8 cm e 6 cm. Calculamos duas possíveis razões entre seus lados:



$$\frac{10}{8} = 1,25$$

$$\frac{6}{8} = 0,75$$

Figura 22: Algumas razões entre as medidas de lados de um triângulo.

Veja que a primeira razão estabelece a comparação entre a hipotenusa e o cateto maior, e o resultado significa que a hipotenusa é 1,25 vezes (ou 25%) maior do que o cateto em questão. Já a segunda razão estabelece a comparação entre o cateto menor e o cateto maior, significando que a medida do cateto menor equivale a 0,75 vezes (ou 75%) da medida do cateto maior.

É fazendo todas as comparações possíveis entre os lados de um triângulo retângulo que estabelecemos as razões trigonométricas. Vejamos como isso se dá. Como sabemos, em um triângulo retângulo seus lados se distinguem entre hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente, considerando-se um de seus ângulos agudos.

Nos exemplos abaixo, consideremos o ângulo α indicado. Podemos estabelecer a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Essa razão recebe o nome de **seno** do ângulo alpha, também denotado por sen(α):

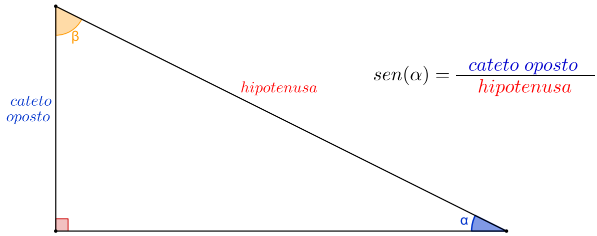


Figura 23: Razão seno de um ângulo alpha.

Outra possível razão dá-se entre o cateto adjacente e a hipotenusa. Essa razão é chamada de **cosseno** do ângulo alpha, ou simplesmente cos(α):

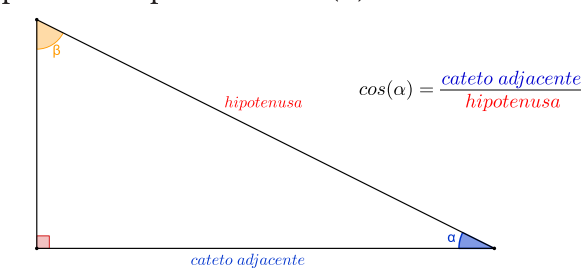


Figura 24: Razão cosseno de um ângulo alpha.

Uma terceira razão pode ser obtida entre o cateto oposto e o cateto adjacente. A esta razão chamamos de **tangente** do ângulo alpha, ou tg(α):

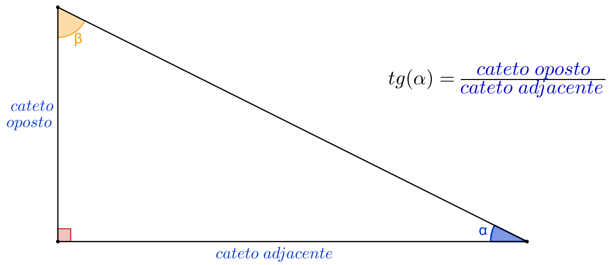


Figura 25: Razão tangente de um ângulo alpha.

Importante destacar que se calcularmos a razão entre o valor do seno e o valor do cosseno de um ângulo alpha, também encontraremos a tangente de alpha:

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Isso porque, uma vez que as razões seno e cosseno são dadas por:

$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \qquad cos(\alpha) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

se dividirmos o seno de alpha pelo cosseno de alpha, temos como resultado a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. O que, como vimos, é justamente a razão tangente do ângulo alpha:

$$\frac{sen(\alpha)}{cos\ (\alpha)} = \frac{\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}} = \frac{cateto\ oposto}{\cancel{hipotenusa}} \cdot \frac{\cancel{hipotenusa}}{cateto\ adjacente} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Até aqui estabelecemos três razões trigonométricas em um triângulo retângulo, considerando-se um de seus ângulos (nesse caso, nosso ângulo alpha): o seno, o cosseno e a tangente. Essas são as principais razões trigonométricas. As outras três são as razões inversas do seno, do cosseno e da tangente e recebem os nomes de cossecante, secante e cotangente, respectivamente. Vejamos.

A razão entre a hipotenusa e o cateto oposto é o que chamamos de **cossecante** do ângulo alpha, ou cossec(α):

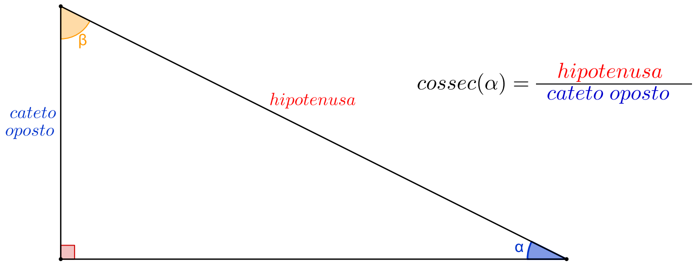


Figura 26: Razão cossecante de um ângulo alpha.

A razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente é denominada de **secante** do ângulo alpha, ou sec(α):

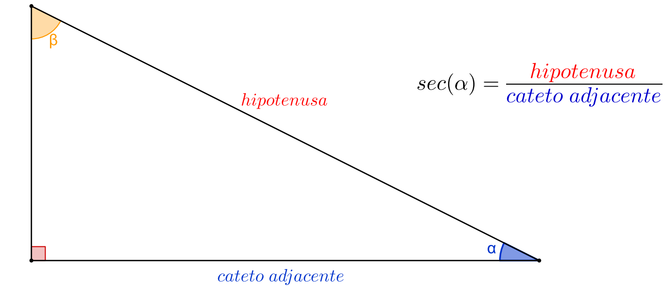


Figura 27: Razão secante de um ângulo alpha.

Por fim, a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto é chamada de **cotangente** do ângulo alpha, ou cotg(α):

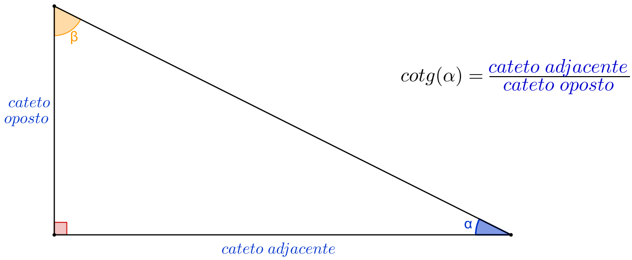


Figura 28: Razão cotangente de um ângulo alpha.

Pronto! Estão estabelecidas as seis razões trigonométricas em um triângulo retângulo, considerando-se um de seus ângulos (aqui, o ângulo alpha): seno de alpha; cosseno de alpha; tangente de alpha; cossecante de alpha; secante de alpha; e cotangente de alpha.

Todas essas relações podem igualmente ser estabelecidas para o ângulo beta, da mesma forma que fizemos com o ângulo alpha. Nesse caso, é preciso ficar atento para o fato de que, ao considerar o ângulo beta, os catetos oposto e adjacente mudam de posição!

Vejamos um exemplo de cálculo dessas razões. No triângulo retângulo abaixo, cujas medidas dos lados e ângulos estão indicados, consideremos o ângulo interno de 26°. Para calcularmos o valor do seno desse ângulo, devemos estabelecer a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

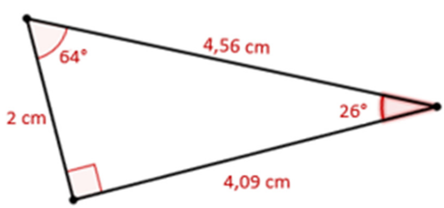
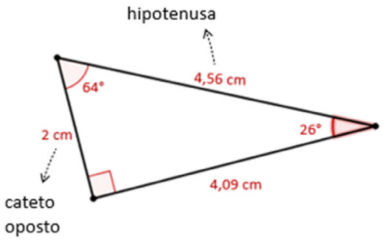


Figura 29: Triângulo retângulo com um ângulo de 26°.

Ao calcularmos essa razão, dividindo 2 por 4,56, encontramos o valor aproximado de 0,4384. Este é o valor do seno de um ângulo de 26°:



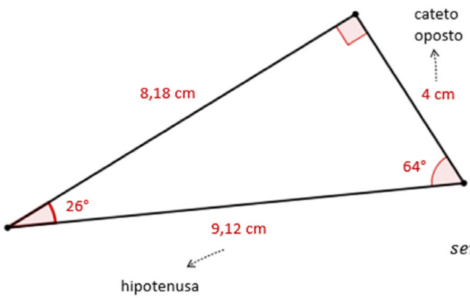
$$sen(26°) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$sen(26°) = \frac{2}{4{,}56} \cong 0{,}4384$$

Figura 30: Razão seno de um ângulo de 26°.

É muito importante destacar aqui que o valor do seno de um ângulo é fixo, ou seja, sempre que calcularmos o seno do ângulo de 26°, por exemplo, encontraremos o valor aproximado de 0,4384.

A título de ilustração, observe que na figura abaixo o triângulo retângulo possui um ângulo de 26° mas as medidas de seus lados são distintas das medidas dos lados do triângulo utilizado no exemplo anterior. No entanto, ao calcularmos a razão seno do ângulo de 26°, chegamos ao mesmo valor aproximado de 0,4384:



$$sen(26°) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$sen(26°) = \frac{4}{9{,}12} \cong 0{,}4384$$

Figura 31: Razão seno de um ângulo de 26°.

Isso ocorre porque todos os triângulos retângulos que possuem um ângulo de 26° são semelhantes. Na verdade, quaisquer triângulos retângulos que possuam um de seus ângulos agudos de mesma medida serão sempre semelhantes. Por exemplo, se tivermos um triângulo retângulo com um ângulo de 56°, este triângulo será semelhante a qualquer outro triângulo retângulo que também possua um ângulo de 56°.

E por que isso acontece? Você se lembra do fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°? Então… No caso dos triângulos retângulos, por definição, um dos seus ângulos internos sempre mede 90°. Se além do ângulo reto, dois (ou mais) triângulos retângulos possuem um segundo ângulo interno de medida comum, o terceiro ângulo interno obrigatoriamente também terá uma medida comum, afinal a soma dos três ângulos internos deve ser 180°.

Nos casos acima, por exemplo, temos dois triângulos retângulos com um ângulo interno que mede 26°. Como eles possuem, ambos, um ângulo reto (porque são triângulos retângulos), obrigatoriamente, o terceiro ângulo interno, em ambos os triângulos, medirá 64°, pois 90° + 26° + 64° = 180°.

Mas talvez você esteja se perguntando: o que significa, afinal, que dois (ou mais) triângulos sejam **semelhantes**? Sabe quando você dá um "zoom" em uma foto no celular, por exemplo? A imagem inteira aumenta ou diminui sem que nenhum elemento da foto fique distorcido, não é mesmo? Isso acontece porque a imagem aumenta ou reduz **proporcionalmente**. É exatamente isso o que acontece com triângulos semelhantes: as medidas dos ângulos permanecem inalteradas e os lados aumentam ou diminuem em uma mesma razão (ou proporção). Ou seja, ser **semelhante** significa que um dos triângulos é uma ampliação ou uma redução do outro. Em outras palavras, se através de um "zoom" pudermos colocar um triângulo sobre o outro, de forma que eles fiquem exatamente sobrepostos, temos então dois triângulos semelhantes. Isso vale não apenas para triângulos, mas para qualquer figura!

É por isso que os triângulos das figuras 30 e 31 são semelhantes. Veja que seus ângulos têm medidas comuns e a razão entre os seus lados correspondentes é sempre a mesma. Se calcularmos a razão entre as hipotenusas encontramos o valor 2. Esse mesmo valor é encontrado ao calcularmos as razões entre os catetos opostos e entre os catetos adjacentes. Então, dizemos que a razão de semelhança entre os dois triângulos é 2, ou seja, o triângulo maior é o dobro do triângulo menor.

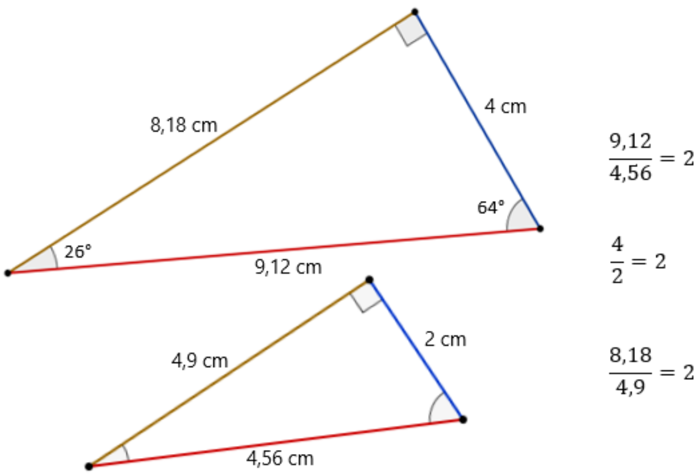


Figura 32: Razão entre os lados correspondentes de dois triângulos.

Mas tem mais! Também a razão entre dois lados de um **mesmo** triângulo será igual à razão entre os lados correspondentes de um triângulo semelhante a ele. Considere os triângulos semelhantes do exemplo abaixo. Veja que as razões entre os lados de cada triângulo têm o mesmo valor:

$$\frac{3}{1,25} = 2,4 \qquad \frac{3,25}{1,25} = 2,6 \qquad \frac{3,25}{3} \cong 1,083$$

$$\frac{6}{2,5} = 2,4 \qquad \frac{6,5}{2,5} = 2,6 \qquad \frac{6,5}{6} \cong 1,083$$

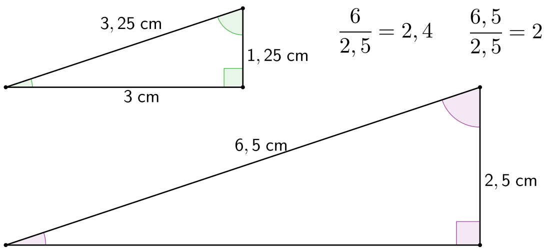


Figura 33: Razão entre lados de dois triângulos semelhantes.

É por esse motivo que o seno de um ângulo terá sempre um valor fixo. Ou seja, em qualquer triângulo retângulo que possua um ângulo de 26°, por exemplo, a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa será de aproximadamente 0,4384, independentemente do tamanho do triângulo.

Da mesma forma, isso acontece com todas as outras razões trigonométricas, para qualquer ângulo. Por exemplo, considerando-se o ângulo de 30°, temos que o sen(30°) é sempre 0,5; o cos(30°) é sempre aproximadamente 0,8660; a tg(30°) é sempre aproximadamente 0,5774, a sec(30°) é sempre aproximadamente 1,1547; a cossec(30°) é sempre 2; e a cotg(30°) é sempre aproximadamente 1,732.

Esses fatos já são conhecidos há bastante tempo, com registros históricos datados desde a antiguidade. Uma vez que os valores dessas razões são constantes, ter à disposição uma tabela de razões trigonométricas auxilia muito em cálculos matemáticos envolvendo ângulos e triângulos. Há indícios de que a primeira tábua (tabela) de senos tenha sido construída na Índia e data do século IV ou V d.C.!

Por curiosidade, apresentamos abaixo uma tabela com os valores das razões seno, cosseno e tangente para os ângulos inteiros de 0° a 90°:

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Graus	Seno	Cosseno	Tangente
0	0	1,0000	0,0000	**30**	0,5	0,8660	0,5774	**60**	0,866	0,5	1,7321
1	0,0175	0,9998	0,0175	**31**	0,515	0,8572	0,6009	**61**	0,8746	0,4848	1,8040
2	0,0349	0,9994	0,0349	**32**	0,5299	0,8480	0,6249	**62**	0,8829	0,4695	1,8807
3	0,0523	0,9986	0,0524	**33**	0,5446	0,8387	0,6494	**63**	0,891	0,4540	1,9626
4	0,0698	0,9976	0,0699	**34**	0,5592	0,8290	0,6745	**64**	0,8988	0,4384	2,0503
5	0,0872	0,9962	0,0875	**35**	0,5736	0,8192	0,7002	**65**	0,9063	0,4226	2,1445
6	0,1045	0,9945	0,1051	**36**	0,5878	0,8090	0,7265	**66**	0,9135	0,4067	2,2460
7	0,1219	0,9925	0,1228	**37**	0,6018	0,7986	0,7536	**67**	0,9205	0,3907	2,3559
8	0,1392	0,9903	0,1405	**38**	0,6157	0,7880	0,7813	**68**	0,9272	0,3746	2,4751
9	0,1564	0,9877	0,1584	**39**	0,6293	0,7771	0,8098	**69**	0,9336	0,3584	2,6051
10	0,1736	0,9848	0,1763	**40**	0,6428	0,7660	0,8391	**70**	0,9397	0,3420	2,7475
11	0,1908	0,9816	0,1944	**41**	0,6561	0,7547	0,8693	**71**	0,9455	0,3256	2,9042
12	0,2079	0,9781	0,2126	**42**	0,6691	0,7431	0,9004	**72**	0,9511	0,3090	3,0777
13	0,225	0,9744	0,2309	**43**	0,682	0,7314	0,9325	**73**	0,9563	0,2924	3,2709
14	0,2419	0,9703	0,2493	**44**	0,6947	0,7193	0,9657	**74**	0,9613	0,2756	3,4874
15	0,2588	0,9659	0,2679	**45**	0,7071	0,7071	1	**75**	0,9659	0,2588	3,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	**46**	0,7193	0,6947	1,0355	**76**	0,9703	0,2419	4,0108
17	0,2924	0,9563	0,3057	**47**	0,7314	0,6820	1,0724	**77**	0,9744	0,2250	4,3315
18	0,309	0,9511	0,3249	**48**	0,7431	0,6691	1,1106	**78**	0,9781	0,2079	4,7046
19	0,3256	0,9455	0,3443	**49**	0,7547	0,6561	1,1504	**79**	0,9816	0,1908	5,1446
20	0,342	0,9397	0,3640	**50**	0,766	0,6428	1,1918	**80**	0,9848	0,1736	5,6713
21	0,3584	0,9336	0,3839	**51**	0,7771	0,6293	1,2349	**81**	0,9877	0,1564	6,3138
22	0,3746	0,9272	0,4040	**52**	0,788	0,6157	1,2799	**82**	0,9903	0,1392	7,1154
23	0,3907	0,9205	0,4245	**53**	0,7986	0,6018	1,3270	**83**	0,9925	0,1219	8,1443
24	0,4067	0,9135	0,4452	**54**	0,809	0,5878	1,3764	**84**	0,9945	0,1045	9,5144
25	0,4226	0,9063	0,4663	**55**	0,8192	0,5736	1,4281	**85**	0,9962	0,0872	11,4301
26	0,4384	0,8988	0,4877	**56**	0,829	0,5592	1,4826	**86**	0,9976	0,0698	14,3007
27	0,454	0,8910	0,5095	**57**	0,8387	0,5446	1,5399	**87**	0,9986	0,0523	19,0811
28	0,4695	0,8829	0,5317	**58**	0,848	0,5299	1,6003	**88**	0,9994	0,0349	28,6363
29	0,4848	0,8746	0,5543	**59**	0,8572	0,5150	1,6643	**89**	0,9998	0,0175	57,2900
								90	1	0	

Tabela 1: Tabela trigonométrica dos ângulos inteiros de 0° a 90°.

Alguns desses ângulos aparecem de forma recorrente nos estudos trigonométricos, principalmente no contexto escolar, e por isso são chamados de ângulos notáveis. São eles: o ângulo de 30°, o de 45°, e o de 60°.

Na tabela abaixo destacamos os valores das razões seno, cosseno e tangente desses ângulos. Perceba que são os mesmos valores indicados para esses ângulos na tabela anterior apresentada. A única diferença é que naquela os valores estão indicados em sua representação decimal e na que segue em sua representação fracionária. Você pode conferir isso usando uma calculadora!

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2: Tabela dos ângulos notáveis.

Por fim, queremos ainda apresentar uma relação muito importante e muito utilizada em cálculos matemáticos, também relativa a triângulos retângulos: **o teorema de Pitágoras**! Esse teorema diz que, dado um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Representamos essa relação na figura a seguir:

$$hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2$$

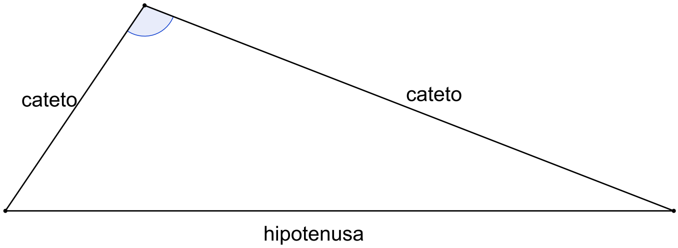


Figura 34: Teorema de Pitágoras.

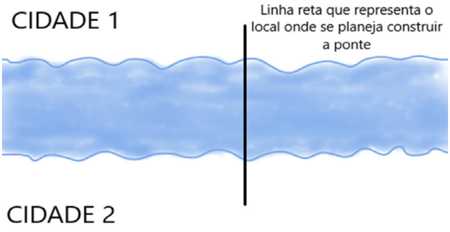
Para finalizar esta seção sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo, apresentamos um exemplo de utilização de conhecimentos trigonométricos em um problema de agrimensura:

Exemplo

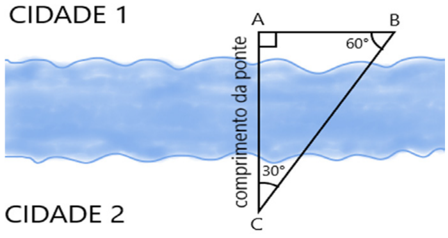
Um engenheiro agrimensor precisa calcular o comprimento de uma ponte que passará sobre um rio que corta duas cidades. Certamente ele fará isso utilizando-se de ferramentas tecnológicas tais como o teodolito, imagens de satélites, Sistema de Posicionamento Geográfico (GPS) e Sistemas de Informações Geográficas (SIG).

Entretanto, toda essa tecnologia é baseada em conhecimentos trigonométricos. E por isso, caso ele não dispusesse dessas ferramentas, poderia ainda assim calcular o comprimento da ponte. Claro que, nesse caso, com muito mais trabalho e possivelmente com dados menos precisos.

Vejamos, de maneira simplificada, que conhecimentos são utilizados para calcular a distância entre as margens de um rio. Essa situação hipotética pode ser ilustrada conforme a figura abaixo:

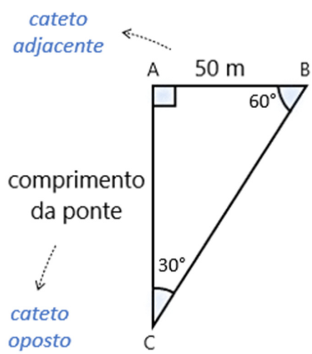


Podemos agora considerar um triângulo retângulo cujos vértices A e C estejam nos extremos da ponte, às margens das cidades 1 e 2, e cujo vértice B esteja na margem da cidade 1. Ainda, consideremos que este triângulo possua ângulos internos de medidas 30° e 60°:



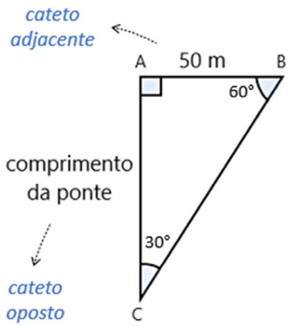
Desejamos descobrir a distância do ponto A até o ponto C, que será a medida do comprimento da ponte. Suponhamos que ao medir a distância entre A e B tenha-se obtido o valor de 50 metros.

Temos, então, um triângulo retângulo com ângulos notáveis de 30º e 60º e a medida de um dos seus lados: 50 metros. Se considerarmos o ângulo de 60º, o seu cateto oposto é justamente o comprimento da ponte e o seu cateto adjacente é a distância entre os pontos A e B, que mede 50 metros.



Sabemos que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo é a razão tangente desse ângulo. Consultando a tabela de ângulos notáveis, encontramos para a tangente do ângulo de 60° o valor $\sqrt{3}$ (raiz quadrada de três), que equivale a 1,7321, aproximadamente.

Do que temos:



$$tg(60°) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$1{,}7321 \cong \frac{comprimento\ da\ ponte}{50\ metros}$$

$$comprimento\ da\ ponte \cong 50 \,.\, 1{,}7321$$

$$comprimento\ da\ ponte \cong 86{,}605\ metros$$

O comprimento da ponte, portanto, é aproximadamente 1,7321 vezes maior do que a distância do ponto A até o ponto B, que mede 50 metros. Assim, multiplicando 1,7321 por 50 metros obtemos 86,605 metros, que é a medida procurada do comprimento da ponte.

Círculo e Circunferência

Para que possamos aprofundar um pouco mais nosso estudo sobre trigonometria, precisamos agora de alguns novos conceitos. Vamos começar pelo círculo e pela circunferência.

A **circunferência** é uma linha curva, plana e fechada. Além disso, qualquer ponto pertencente a essa linha deve ser equidistante (ter a mesma distância) de um ponto fixo, chamado centro da circunferência.

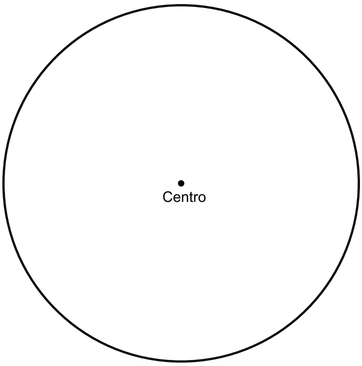


Figura 35: Circunferência com centro marcado.

Existem outras linhas curvas, planas e fechadas que não são circunferências. E isso, justamente porque nelas não há um centro em relação ao qual todos os seus pontos têm a mesma distância:

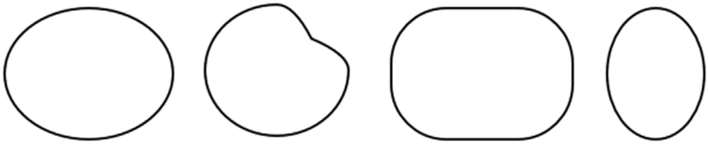


Figura 36: Exemplos de linhas curvas, planas e fechadas que não são circunferências.

Quanto ao **círculo**, ele é a circunferência mais a região interna delimitada por ela. É muito comum confundir circunferência e círculo! Mas, fique atento: a circunferência é apenas a linha em torno do círculo!

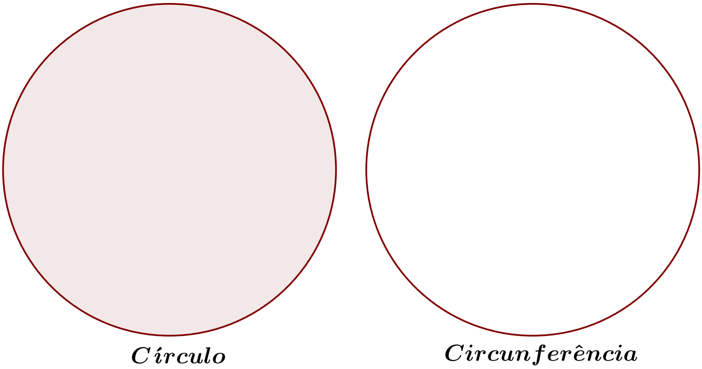


Figura 37: Círculo e circunferência.

Alguns objetos nos ajudam a exemplificar melhor. Um anel, por exemplo, pode ser associado a uma circunferência. Já um disco de vinil pode ser associado a um círculo:

Figura 38: Anel como exemplo de circunferência.

Figura 39: Disco de vinil como exemplo de círculo.

É importante destacar que, em se tratando de medidas, quanto às circunferências, podemos medir seu comprimento (o tamanho da borda ou do contorno). Já em relação ao círculo, podemos medir sua área (o tamanho da região interna à circunferência).

Para o cálculo dessas medidas, utilizamos duas fórmulas bastante famosas! Será que você conhece? Com elas, podemos calcular o comprimento de qualquer circunferência e a área de qualquer círculo. A fórmula do comprimento da circunferência é dada por: $C = 2.\pi.r$; e a fórmula da área do círculo é dada por: $A = \pi.r^2$. Nessas fórmulas, a letra "*r*" refere-se à medida do raio da circunferência, e "π" (pi) é uma letra grega utilizada para representar uma constante muito especial em matemática.

Aqui, cabem dois dedos de conversa sobre o processo de obtenção dessas fórmulas e, em especial, sobre a constante π. Mas, antes, vamos destacar alguns elementos importantes da circunferência.

O primeiro desses elementos é o **raio**. Talvez ao ler essa palavra você se lembre de raios de bicicleta, não? Aquelas hastes finas que ligam o centro da roda ao aro. Aliás, o aro de uma bicicleta também é um bom exemplo que nos ajuda a entender o que é uma circunferência!

Figura 40: Aro de bicicleta como exemplo de raios.

Pois é isso mesmo! O raio, geralmente denotado pela letra "*r*", é qualquer segmento de reta que ligue um ponto da circunferência até seu centro. Como já vimos, todos os pontos da circunferência têm a mesma distância em relação ao centro, logo todos os raios de uma circunferência têm o mesmo tamanho.

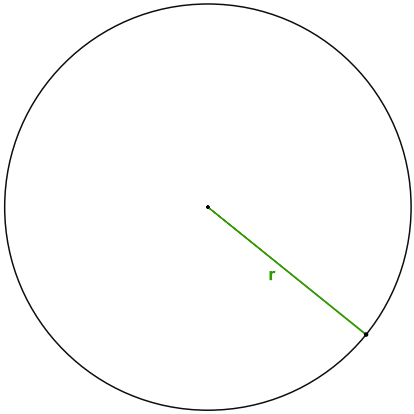


Figura 41: Raio em uma circunferência.

Outro elemento da circunferência é a **corda**. A corda é um segmento de reta que liga dois pontos da circunferência, tal como no exemplo abaixo:

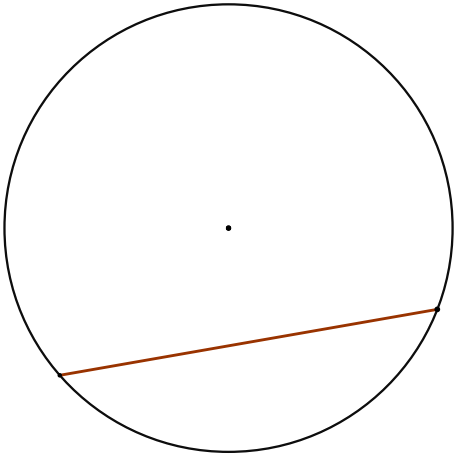


Figura 42: Corda em uma circunferência.

Quando uma corda passa pelo centro da circunferência, ela recebe o nome de **diâmetro**. Veja que o diâmetro é uma corda que sempre divide a circunferência (e, por consequência, também o círculo) ao meio. Por isso, **a medida do diâmetro é sempre duas vezes a medida do raio**! Ou, o que é equivalente, **a medida do raio é sempre a metade da medida do diâmetro**.

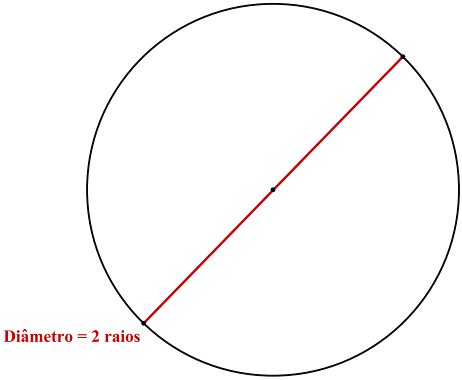


Figura 43: Diâmetro em uma circunferência.

Você sabia que pizzarias determinam o tamanho de suas pizzas a partir da medida do diâmetro? O diâmetro de uma pizza pequena, por exemplo, em geral, mede 25 cm; uma pizza média tem comumente 30 cm de diâmetro; já uma pizza grande tem diâmetro de 35 cm!

Mas há uma outra situação bem comum que também trata de diâmetros de circunferências. Uma bicicleta de aro 26 é uma bicicleta cujo diâmetro do aro mede 26 polegadas. Pois é! A polegada é uma unidade de medida que equivale a 2,54 cm. Assim, uma bicicleta de aro 26 é uma bicicleta cujo aro tem um diâmetro de 66,04 cm!

Outro elemento que pode ser destacado em uma circunferência é o **arco**. Um arco nada mais é do que um "pedaço da circunferência". Na figura abaixo temos destacados dois arcos (um na cor preta e outro na cor verde):

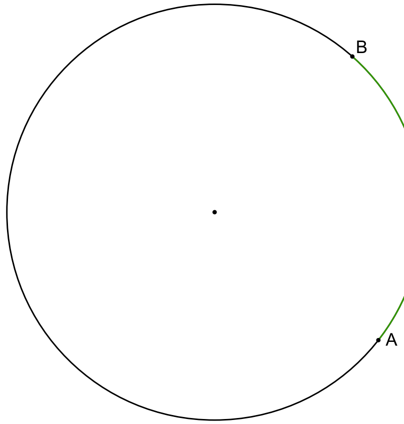


Figura 44: Arco em uma circunferência.

Perceba que um arco é sempre delimitado por dois pontos da circunferência:

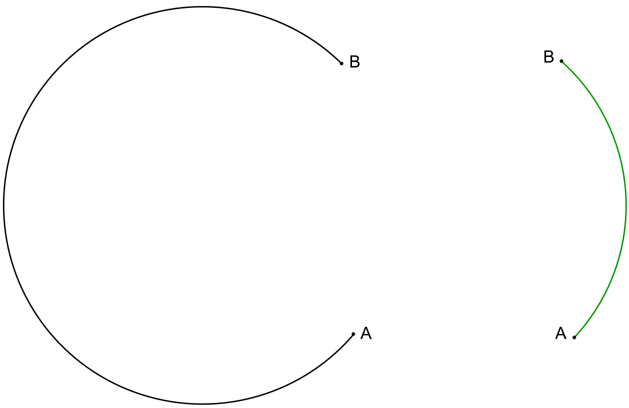


Figura 45: Arco em uma circunferência.

Um arco pode ser nomeado, assim como já fizemos com ângulos e triângulos. Para nomear um arco, geralmente usa-se o símbolo $\frown$ (acento circunflexo) sobre os pontos que o delimitam, tal como $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$; ou, simplesmente, diz-se arco AB, ou arco CD, etc.

Mas, talvez você esteja se questionando: Na figura anterior, então, qual será o arco AB? O arco de cor verde ou o arco de cor preta? Essa é uma boa questão! Para evitar confusão quanto a isso, é convencionado que se deve considerar o arco no sentido anti-horário na circunferência. Assim, na figura acima, chamamos o arco verde de arco AB (ou $\widehat{AB}$); já o arco preto é chamado de arco BA (ou $\widehat{BA}$).

Um arco de circunferência também pode ser medido. E isso pode acontecer de duas formas! Podemos atribuir a um arco uma **medida linear** e também podemos atribuir-lhe uma **medida angular**. É importante ficar bem atento aqui! Essas medidas são distintas: a medida linear é a medida do comprimento do arco; já a medida angular é a medida do ângulo central associado ao arco. Vejamos o que significa isso.

Considere o arco RS a seguir. Dizer que a **medida linear** do arco é o seu comprimento significa considerar a distância percorrida sobre o arco RS, entre os pontos R e S. É como se "caminhássemos" de R até S e medíssemos essa distância:

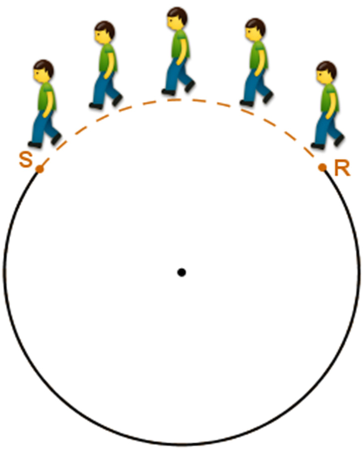


Figura 46: Medida linear de um arco $\widehat{RS}$.

A **medida angular** de um arco, por sua vez, é a medida do ângulo central associado a esse arco. O **ângulo central** é o último elemento da circunferência a ser destacado (os outros elementos, como vimos, são o raio, a corda e o arco). Um ângulo é dito central se o seu vértice for o centro da circunferência. Veja que todo arco tem um ângulo central a ele associado:

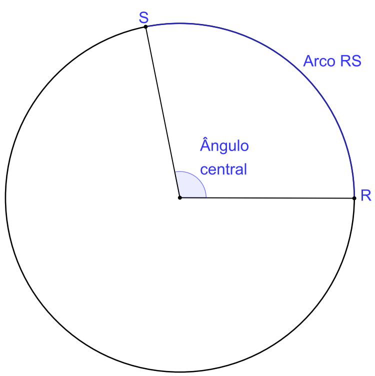


Figura 47: Ângulo central correspondente a um arco $\widehat{RS}$.

Assim, quando tratamos da medida angular de um arco, estamos tratando da medida do ângulo central associado a ele. Se o ângulo central associado ao arco RS mede 101°, por exemplo, dizemos que a medida angular do arco RS é 101°.

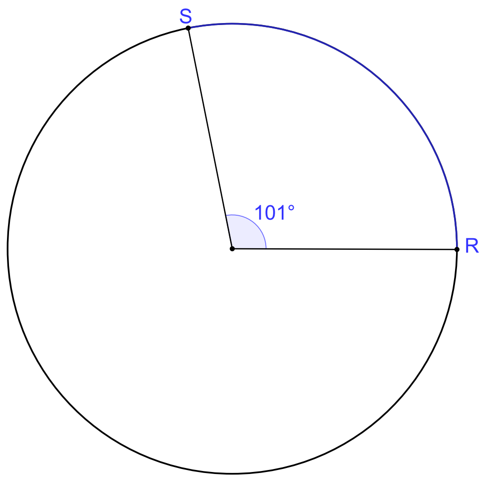


Figura 48: Medida angular de um arco RS.

Importante destacar que arcos de comprimentos diferentes podem ter um mesmo ângulo central associado. Ou seja, **arcos de diferentes medidas lineares podem ter a mesma medida angular.**

Por exemplo, na figura a seguir os dois arcos destacados têm o mesmo ângulo central associado e medem, angularmente, 67°. Mas, perceba que, embora tenham a mesma medida angular, esses arcos têm medidas lineares distintas, ou seja, seus comprimentos são distintos:

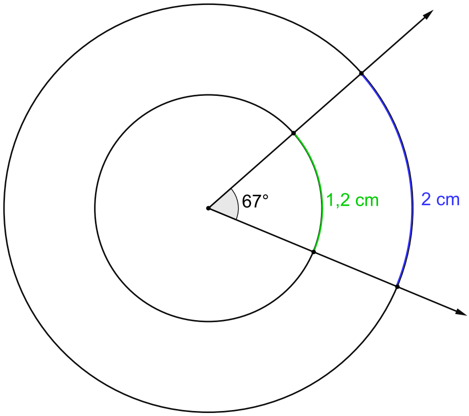


Figura 49: Arcos de mesma medida angular e medidas lineares distintas.

Legal, não é? Mas ainda não acabou! Vimos na primeira seção que ângulos são geralmente medidos em graus. No entanto, há também uma outra unidade de medida de ângulo que é bastante utilizada nos estudos trigonométricos: o **radiano** (também denotado pela abreviação **rad**). Você já ouviu falar dele?

Para falarmos sobre o radiano, é importante reforçar: **medir é comparar**! E a unidade de medida utilizada é o parâmetro para essa comparação, para dizer quanto "cabe" da unidade de medida naquilo que está sendo medido ou, em outras palavras, para dizer quantas vezes aquilo que está sendo medido é maior ou menor do que a unidade de medida em questão.

Já vimos que o grau é uma unidade de medida de ângulo e que é uma das 360 partes iguais em que uma circunferência é dividida. Ou seja, o grau é um arco equivalente a 1/360 da circunferência. Quando medimos um ângulo utilizando o grau, o que essa medida nos diz, então, é quantas dessas partes (graus) "cabem" na "abertura" do ângulo considerado. Ou, quantas vezes a "abertura" do ângulo é maior (ou menor) do que esse arco de circunferência (o grau).

Assim como o grau, o radiano é uma parte da circunferência (um arco), que é tomada como unidade de medida. Mas, enquanto o grau é um arco que mede 1/360 da circunferência, **o radiano é um arco que tem a medida do raio da circunferência.** Observe a figura abaixo:

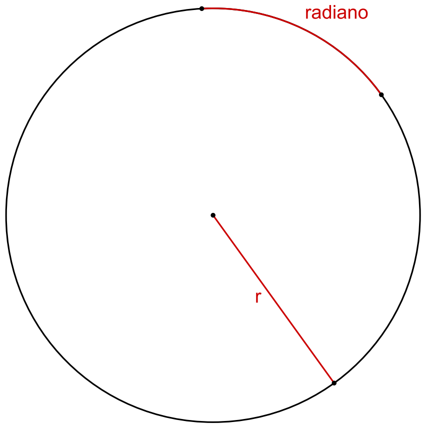


Figura 50: Radiano.

Dessa forma, quando medimos um ângulo utilizando o radiano, o que essa medida nos diz é quantas dessas partes – arcos de um raio de comprimento – "cabem" na "abertura" do ângulo considerado. Ou, quantas vezes a "abertura" do ângulo é maior (ou menor) do que um arco de circunferência que tem o comprimento do raio (o radiano).

Assim sendo, um arco de circunferência cujo comprimento (ou medida linear) seja igual à medida do raio da circunferência terá uma medida angular de 1 radiano. Se tivermos um arco de circunferência cuja medida linear seja o dobro da medida do raio da circunferência, sua medida angular será de 2 radianos, e assim por diante:

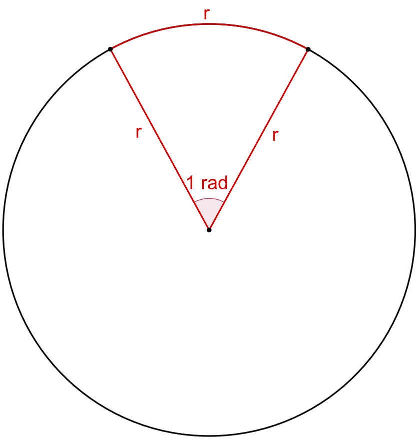


Figura 51: Arco de 1 radiano (1 rad).

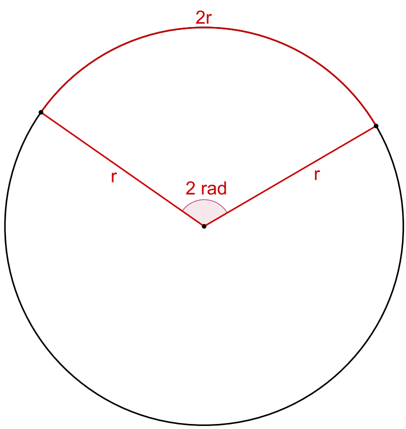
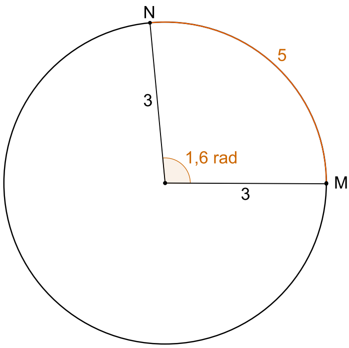


Figura 52: Arco de 2 radianos (2 rad).

Na figura abaixo, por exemplo, temos uma circunferência de raio 3 unidades e marcamos um arco MN de comprimento 5 unidades. Podemos dizer que o arco MN tem medida angular de aproximadamente 1,6 rad, que é a razão entre o comprimento do arco e a medida do raio:



$$\frac{comprimento\ do\ arco}{medida\ do\ raio} = \frac{5}{3} \cong 1,6\ rad$$

Figura 53: Arco de medida angular igual a, aproximadamente, 1,6 rad.

Compreendida essa distinção entre medida linear e medida angular, há ainda uma questão para a qual queremos chamar atenção. Perceba que, embora a ideia de medida linear de um arco seja aparentemente simples (afinal, para obtê-la, basta tomarmos a medida do comprimento do arco), não é assim tão trivial obter essa medida. Isso porque, como o próprio nome indica, uma medida linear é uma medida que implica a utilização de uma unidade de medida também linear (reta). Mas pense que isso está sendo posto para medir algo curvo! Percebeu o problema? É como se quiséssemos (e queremos!) medir um arco (ou uma circunferência) utilizando uma régua comum (reta), graduada em centímetros! (O mesmo vale para o cálculo da área do círculo!).

Talvez aqui você diga: Então por que não se utiliza uma unidade de medida curva e resolve-se o problema? Ora, mas isso é justamente o que faz a medida angular, não é? O grau e o radiano são unidades de medida curvas, são arcos de circunferência tomados como parâmetro de comparação. Logo, se quisermos uma medida do comprimento do arco em centímetros ou metros (unidades de medida linear), vamos ter que enfrentar esse problema! E é aqui que voltamos às fórmulas de comprimento da circunferência e área do círculo que apresentamos no início desta seção!

O problema da determinação do comprimento da circunferência data de tempos distantes. A fórmula $C = 2.\pi.r$ é atribuída a Arquimedes (287 a.C.). Para esse cálculo, utilizou-se de um método conhecido como método da exaustão: inscrevem-se e circunscrevem-se polígonos à circunferência e, por aproximação, consegue-se definir intervalos dentre os quais esteja o comprimento da circunferência. A partir desse método, Arquimedes conseguiu aproximações também para a área de um círculo, comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos, e relacionando-a com o comprimento da circunferência.

A ideia do método de exaustão é "simples" e genial: calcula-se a área de um círculo (e o comprimento de sua circunferência) a partir de figuras mais simples, tal como um quadrado, por exemplo. Para tanto, procura-se o maior quadrado possível inscrito (interno) ao círculo e, ao mesmo tempo, o menor quadrado possível circunscrito (externo) ao círculo. Dessa forma, a área do círculo será algum valor situado entre os valores das áreas desses dois quadrados

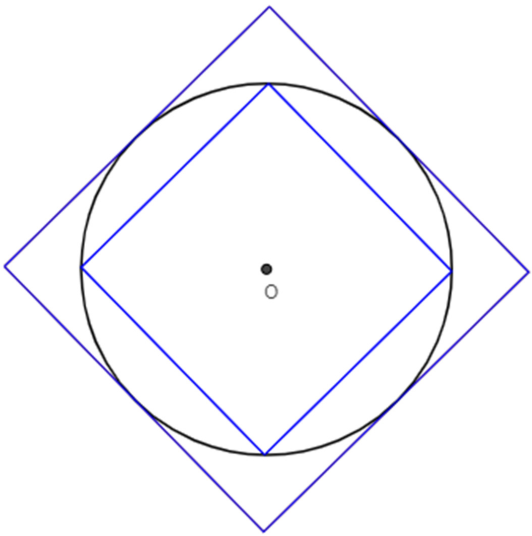


Figura 54: Quadrado inscrito e circunscrito em um círculo.

Perceba que, se esse processo for realizado com polígonos de número de lados cada vez maior, aproximamo-nos mais e mais da área do círculo. É justamente esse processo que é chamado de método de exaustão! E por esse método é que se determinaram as fórmulas do comprimento da circunferência e área do círculo que já comentamos!

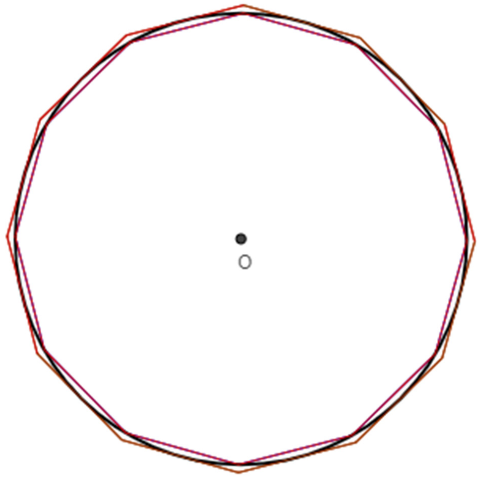


Figura 55: Polígono de 12 lados inscrito e circunscrito em um círculo.

Por outro lado, veja que, na medida em que aumentamos o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, apenas nos aproximamos da circunferência mas, efetivamente, nunca chegamos a ela! É um processo infinito! E o mais incrível é que nesse processo infinito de aproximação encontramos uma constante bem especial em matemática, o famoso número π... Você certamente já ouviu falar de π!

Aplicando-se o método da exaustão em um círculo de raio unitário, utilizando-se polígonos de número de lados cada vez maior, vai-se encontrando para a área do círculo o valor de 3,1415926535… Esse número, de representação decimal infinita e que não apresenta nenhuma ordem de repetição (números com essas duas características são chamados de números irracionais), é o que denominamos de π. Atualmente, são conhecidas 8 quatrilhões de casas decimais desse número! Isso é realmente fascinante! Algo de dar "nó na cabeça", não é mesmo?

Mas então, "na prática", não é possível determinar o comprimento de circunferências e áreas de superfícies curvas? Bem, é sim possível determinar essas medidas, mas é preciso compreender que seus valores serão sempre aproximados, já que, como π possui uma representação decimal infinita, sempre trabalhamos com valores aproximados dele. "Na prática", se quisermos calcular o comprimento de uma circunferência, primeiro devemos medir seu raio ou diâmetro e depois utilizamos esse valor na fórmula do comprimento da circunferência ($C = 2.\pi.r$).

Considere, por exemplo, uma circunferência de raio 3 cm. Utilizando-se a fórmula do comprimento da circunferência, temos que seu comprimento é: $C = 2.\pi.3$, ou seja, $C = 6.\pi$. Perceba agora que quanto mais casas decimais de π considerarmos, mais preciso será o valor que estamos procurando. Se tomarmos π como aproximadamente 3,1, teremos o comprimento aproximado da circunferência de 18,8 cm; se tomarmos π como aproximadamente 3,14, teremos o comprimento aproximado da circunferência de 18,84 cm; se tomarmos π como aproximadamente 3,141, teremos o comprimento aproximado da circunferência de 18,846 cm; e assim por diante. Atualmente, buscando maior precisão, muitas calculadoras já até apresentam o número π dentre suas teclas, tomando seu valor com várias casas decimais!

Uma forma concreta, digamos, de verificar o valor desse comprimento é colocando um barbante, por exemplo, sobre toda a circunferência, dando uma volta completa nela, e depois medindo o comprimento desse barbante. Em uma circunferência de raio 3 cm, ao realizar esse procedimento, o valor encontrado será de aproximadamente 18,84 cm. Não acredita? Faça o teste! Você verá que isso de fato acontece!

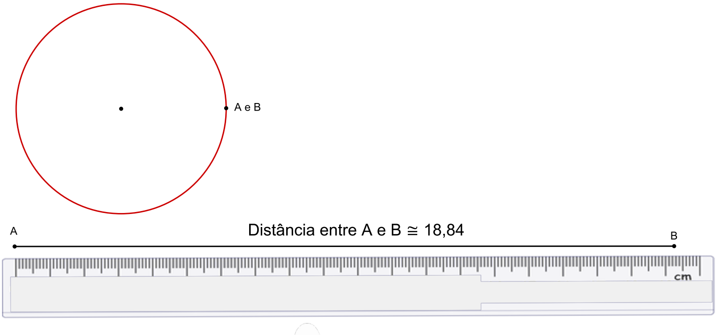


Figura 56: Medida do comprimento de uma circunferência de raio 3 cm.

Veja que uma régua comum só nos permite trabalhar até a casa dos milímetros e é por isso que, nesse caso, encontraremos um valor de aproximadamente 18,84 cm. Ou seja, na prática cotidiana, dadas as limitações de nossos sentidos e de nossos instrumentos de medida, geralmente calculamos o comprimento de uma circunferência multiplicando o comprimento do seu raio por 3,14.

No entanto, se tivermos à disposição algum instrumento de medida de maior precisão, que faça uso de tecnologia digital, por exemplo, trabalhando com subunidades menores do que o milímetro, melhor será nossa aproximação e o valor encontrado.

Inversamente, toda vez que calcularmos a razão entre o comprimento de uma circunferência (tomando esse comprimento com uma precisão de duas casas decimais) e o comprimento do raio, sempre encontraremos para essa razão o valor de 6,28. Ou ainda, toda vez que calcularmos a razão entre o comprimento de uma circunferência (com uma precisão de duas casas decimais) e o comprimento do diâmetro, sempre encontraremos para essa razão o valor de 3,14, que é justamente o valor aproximado de π com duas casas decimais.

O que se tem, portanto, é que **em qualquer circunferência a razão entre seu comprimento e seu diâmetro é um valor constante (fixo): π.** Isso acontece pelo mesmo motivo que vimos quando tratamos das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Você se lembra de que as razões seno, cosseno, tangente (e suas inversas) de um ângulo têm sempre o mesmo valor, independentemente do tamanho dos triângulos considerados? E lembra-se de que isso acontece porque os triângulos retângulos são semelhantes?

Pois é exatamente isso o que ocorre com circunferências! Todas as circunferências são semelhantes (todas medem 360°, ou seja, todas têm a mesma medida angular!). Assim, uma circunferência é sempre uma ampliação ou uma redução em relação a qualquer outra circunferência. Por isso, sempre que tomamos uma razão entre elementos dessas circunferências, essa razão tem o mesmo valor, é constante! Em particular, a razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência é a constante irracional π.

Muito bem! Agora voltemos à questão da medida angular de um arco, tomando a circunferência. Sabemos que uma circunferência, se medida em graus, tem medida angular de 360°. Por outro lado, qual será a medida angular de uma circunferência, se ela for medida em radianos?

Para responder essa questão é preciso lembrar-se de que o radiano é uma unidade de medida que toma um arco de circunferência de tamanho igual ao do raio como unidade de medida. E que a medida em radianos é dada pela razão entre e a medida do comprimento do arco (aqui o arco completo de circunferência) e a medida do raio. Ora, como vimos, a medida do comprimento da circunferência é dada por $2.\pi.r$. Estabelecendo-se a razão entre esse comprimento e a medida do raio temos: $\frac{2\pi.r}{r}$, que resulta em 2π. Logo, a circunferência, se medida em radianos, mede 2π rad.

Se considerarmos π com seu valor aproximado de 3,14, por exemplo, isso significa que em qualquer circunferência sempre “cabem” 6 arcos de medida igual a medida do raio mais um pequeno arco que mede 0,28 da medida do raio, tal como ilustramos na figura a seguir:

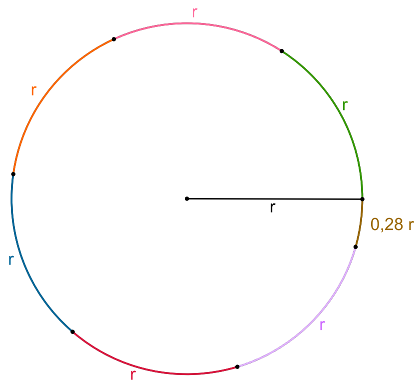


Figura 57: Circunferência de raio de “r” medindo seis arcos de comprimento “r” mais um arco de 0,28r.

Assim sendo, temos que toda circunferência tem medida linear de 2.π.r (a medida do seu comprimento); e toda circunferência mede, angularmente, 360° (quando medida em graus) ou 2.π rad (quando medida em radianos). Logo, uma vez que tanto o grau quanto o radiano são unidades de medida angular, podemos dizer que 360° equivalem a 2.π rad:

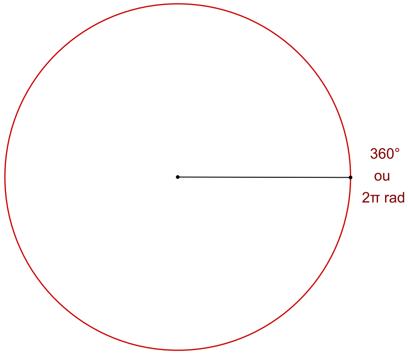


Figura 58: Arco de uma volta completa na circunferência equivalendo a 360° ou 2π rad.

Vejamos alguns exemplos a partir dessa relação. Um arco AB, de ½ (meia) volta da circunferência, por exemplo, medirá metade da medida angular da circunferência, portanto 180° ou, o que é equivalente, π rad:

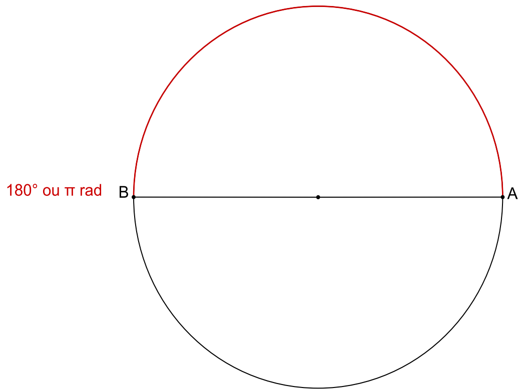


Figura 59: Arco de meia volta na circunferência de medida 180° ou π rad.

Um arco CD, de ¼ (um quarto) de volta da circunferência, da mesma forma, medirá ¼ da medida angular da circunferência. Em graus, isso corresponde a 90° e em radianos, a $\frac{\pi}{2}$ rad:

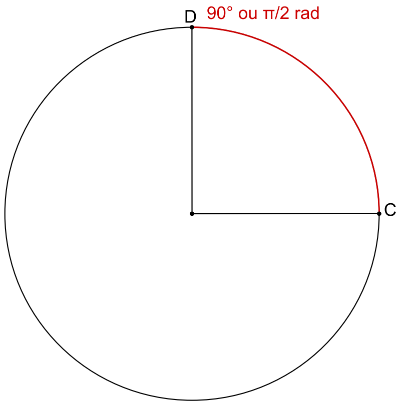


Figura 60: Arco de um quarto de volta na circunferência de medida 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad.

Se tivermos um arco EF, de ¾ (três quartos) de volta da circunferência, por sua vez, este medirá ¾ da medida angular da circunferência. O que em graus corresponde a 270° e, em radiano, a $\frac{3\pi}{2}$ rad.

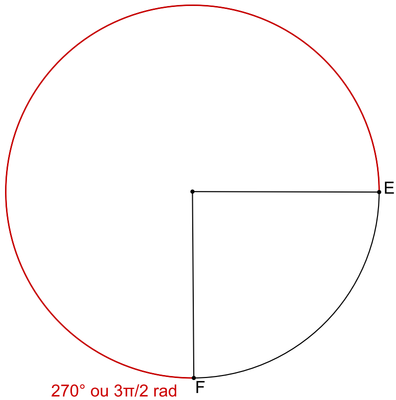


Figura 61: Arco de três quartos de volta na circunferência de medida 270° ou $\frac{3\pi}{2}$ rad.

A título de ilustração, na figura abaixo apresentamos uma circunferência com a indicação de medidas de vários de seus arcos, tanto em graus quanto em radianos. Considere, para todos os arcos, que seu ponto inicial é o ponto A indicado.

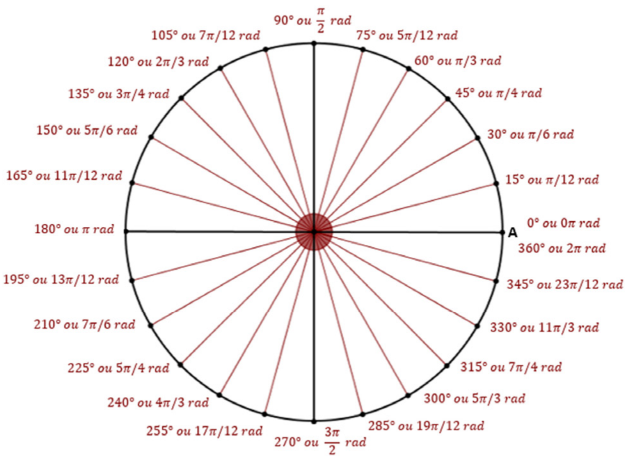


Figura 62: Circunferência com alguns arcos medidos em graus e radianos.

Como sabemos que 360° equivalem a 2.π rad (ou, igualmente, que 180° equivalem a π rad), é possível, a partir dessa equivalência, converter qualquer medida de ângulo em graus para radianos e vice-versa. Essa conversão é realizada por meio de uma **regra de três simples.** Você sabe como utilizar essa regra?

Lembra-se do que vimos sobre razão e proporção na seção de razões trigonométricas? Uma razão é uma relação de comparação, dada por uma operação de divisão entre duas quantidades ou duas grandezas consideradas.

Se duas ou mais razões são constantes (têm o mesmo valor), elas são ditas equivalentes e temos, então, uma situação de **proporcionalidade**.

Nesses casos, sempre que temos duas razões equivalentes, não só seus valores são os mesmos, como também o "produto cruzado" dessas razões permanece constante. Vamos entender melhor o que significa esse "produto cruzado". Considere as razões abaixo:

Razões equivalentes

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{50}{100} = \frac{30}{60}$$

Produto cruzado

$$\frac{4}{8} \times \frac{8}{16} \qquad\qquad \frac{50}{100} \times \frac{4}{8}$$

$$4.16 = 8.8 \qquad\qquad 50.8 = 100.4$$

$$64 = 64 \qquad\qquad 400 = 400$$

Veja que todas as razões são equivalentes, todas têm o mesmo valor: 0,5 ou ½ (Lembre-se de que a razão é o valor da divisão entre as quantidades ou grandezas comparadas). Por outro lado, perceba também que, se tomarmos quaisquer duas dessas razões e realizarmos uma "multiplicação cruzada" entre seus termos, encontramos sempre o mesmo valor. Isso é válido para quaisquer razões equivalentes. Observe mais alguns exemplos:

$$\frac{6}{4} \times \frac{3}{2} \qquad \frac{45}{3} \times \frac{30}{2} \qquad \frac{9}{13} \times \frac{27}{39}$$

$$12 = 12 \qquad 90 = 90 \qquad 351 = 351$$

O que chamamos de regra de três simples, assim, nada mais é do que o uso dessa regularidade, ou seja, da igualdade entre o "produto cruzado" dos termos de duas razões equivalentes. Isso nos ajuda em situações em que conhecemos o valor de alguns desses termos e precisamos descobrir o valor de outro, desconhecido. É exatamente assim que convertemos medidas de ângulo em graus para radianos e vice-versa. Apresentamos a seguir alguns exemplos:

Converter de graus para radianos e vice-versa

Exemplo 1: Como determinar 140° em radianos.

Sabemos que 180° = π rad. Desejamos saber a quantos radianos (valor desconhecido) equivalem 140°. Chamando esse valor desconhecido de x, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{180°}{140°} = \frac{\pi}{x}$$

Há aí uma equivalência entre razões. Disso, sabemos que o "produto cruzado" (ou "multiplicação em x") dos termos das razões deve resultar em um mesmo valor.

Do que temos:

$$\frac{180}{140} = \frac{\pi}{x}$$

$$180x = 140\pi$$

$$x = \frac{140\pi}{180}$$

$$x = \frac{7\pi}{9}$$

Portanto, convertendo-se a medida do ângulo de $140°$ em radianos, obtém-se a medida de $\frac{7\pi}{9}$ rad. Ou seja, $140° = \frac{7\pi}{9}$ rad.

Exemplo 2: Determinar $\frac{2\pi}{3}$ rad em graus.

Assim como fizemos no exemplo anterior, estabelecemos a seguinte relação:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}}$$

Do que temos:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}}$$

$$x\pi = 180 \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$x\pi = 120\pi$$
$$x = \frac{120\pi}{\pi}$$
$$x = 120$$

Logo, $\frac{2\pi}{3}$ rad equivale a 120°.

O radiano é muito utilizado como unidade de medida de ângulo nos estudos trigonométricos e é a unidade de medida de ângulo adotada no Sistema Internacional de Medidas.

Importante destacar, por fim, que costuma ser mais vantajoso o cálculo com medidas em radianos pois, como em geral esses valores são dados em representação fracionária, podemos trabalhar com simplificações, o que nos poupa de cálculos mais trabalhosos e extensos. Sob o ponto de vista da economia de cálculo, é mais simples, por exemplo, trabalhar com π rad ou ½ π rad, do que com essas medidas em graus, cujos valores são 180° ou 90°, respectivamente.

Circunferência trigonométrica

Realizada essa incursão pelos conceitos de circunferência e círculo, vamos agora retomar os estudos sobre razões trigonométricas.

Quando tratamos das razões trigonométricas de um ângulo (seno, cosseno, tangente – e suas inversas: cossecante, secante e cotangente), vimos que tais razões referem-se aos lados de um triângulo retângulo. Além disso, vimos também que **todo triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos**, você se lembra?

Como as razões trigonométricas são tomadas sempre em relação a um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, somos levados a pensar que só é possível calcular essas razões para ângulos menores do que 90°, não é mesmo?

Mas isso não é verdade! Podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente (e suas inversas) de um ângulo de qualquer medida! Para isso, entretanto, precisaremos conhecer um novo conceito muito importante nos estudos em trigonometria: a **circunferência trigonométrica** (também chamada de círculo trigonométrico, ciclo trigonométrico, ou ciclo unitário).

A circunferência trigonométrica é uma circunferência de raio unitário (ou seja, o raio mede 1 unidade de comprimento), cujo centro está localizado na origem do **plano cartesiano (x,y)** (também chamado de sistema cartesiano ortogonal (x,y)).

O plano cartesiano (x,y) é um sistema de coordenadas que nos permite determinar a posição de pontos no plano e, consequentemente, de quaisquer objetos no plano. É algo muito parecido com o sistema de latitudes e longitudes que estudamos em Geografia, você conhece? Quando dizemos que uma cidade, por exemplo, tem determinado valor de latitude e determinado valor de longitude, estamos indicando qual sua posição geográfica na superfície da terra, tomando duas linhas imaginárias como referência (origem, ou ponto zero): a linha do Equador e o Meridiano de Greenwich.

Pois bem. O plano cartesiano (x,y) é formado por duas retas perpendiculares (retas que se cruzam em um ângulo de 90°). Essas retas são graduadas. A reta horizontal é chamada de eixo "x" (ou eixo das abscissas), e a reta vertical é chamada de eixo "y" (ou eixo das ordenadas). O ponto em que essas retas se cruzam é o que chamamos de origem.

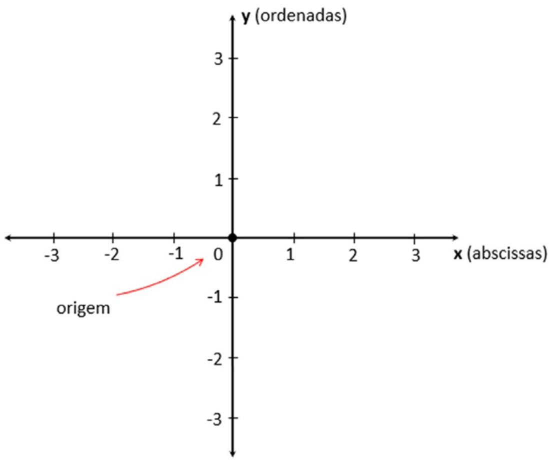


Figura 63: Plano cartesiano.

O plano cartesiano divide o plano em quatro regiões, chamadas de quadrantes, tal como na figura abaixo:

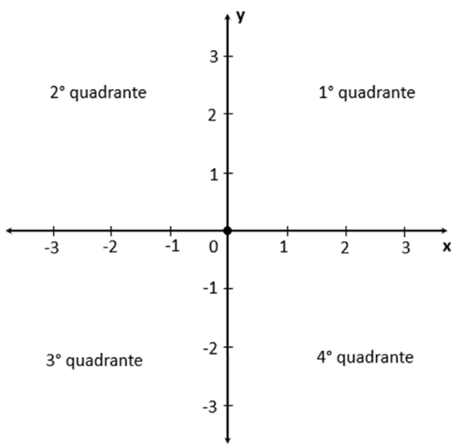


Figura 64: Quadrantes em um plano cartesiano.

Por convenção, a ordenação dos quadrantes sempre se dá em sentido anti-horário. Além disso, também por convenção, a graduação dos eixos se dá em ordem crescente, da esquerda para a direita no eixo horizontal, e em ordem crescente, de baixo para cima no eixo vertical.

Com esse sistema, podemos associar a qualquer ponto no plano uma localização. Observe a figura abaixo:

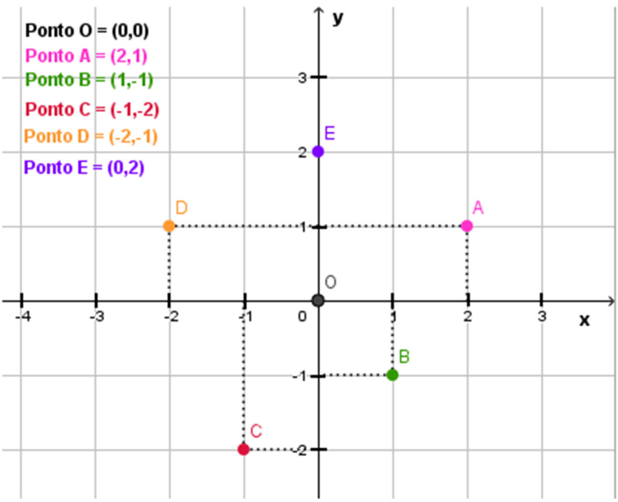


Figura 65: Pontos em um plano cartesiano.

O ponto A está localizado no primeiro quadrante. Dizemos que ele é um ponto de coordenadas 2 e 1. Ou seja, considerando-se o eixo x, o ponto A está na posição 2 (dizemos que é a projeção ortogonal[6] de A no eixo x),

[6] Podemos dizer que uma projeção é a "sombra" de algo (uma figura, por exemplo, ou, no nosso caso, um ponto) em um plano. Quando dizemos que a projeção é ortogonal significa que o ângulo de projeção no plano é de 90°.

considerando-se o eixo y, o ponto A está na posição 1 (dizemos que é a projeção ortogonal de A no eixo y). Mais uma vez, por convenção, **quando indicamos as coordenadas de um ponto, sempre indicamos primeiro o valor de sua coordenada x, seguido do valor de sua coordenada y**. Dizemos, então, que A = (2,1). Assim, todo ponto no plano cartesiano é representado pelo par (x,y), em que x é o valor de sua abscissa e y é o valor de sua ordenada. O mesmo vale para a localização de todos os outros pontos indicados na figura.

Quando associamos, portanto, uma circunferência de raio unitário a um sistema de coordenadas cartesianas, de forma que a origem do sistema cartesiano coincide com o centro da circunferência, temos uma circunferência trigonométrica (que também fica dividida em quatro quadrantes, ordenados em sentido anti-horário).

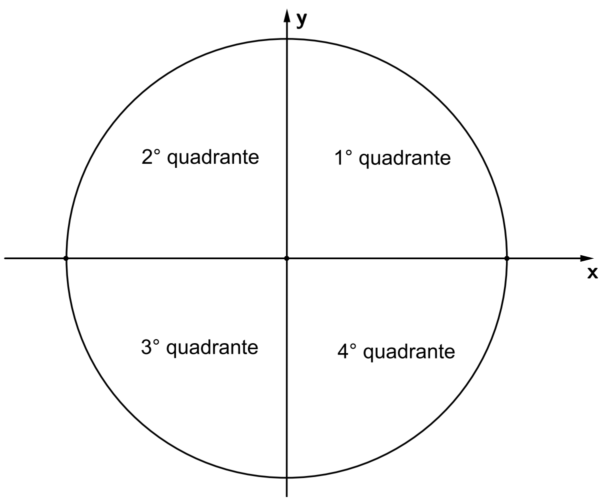


Figura 66: Quadrantes da circunferência trigonométrica.

Vale dizer que o raio da circunferência trigonométrica tem medida de 1 unidade de comprimento, novamente, por uma questão de convenção, com o intuito de facilitar os cálculos. Logo você vai entender por quê!

Assim, nesse sistema temos que: o ponto em que a circunferência "corta" o eixo x no sentido positivo é o ponto (1,0); o ponto em que a circunferência "corta" o eixo x no sentido negativo é o ponto (-1,0); o ponto em que a circunferência "corta" o eixo y no sentido positivo é o ponto (0,1); e o ponto em que a circunferência "corta" o eixo y no sentido negativo é o ponto (0,-1):

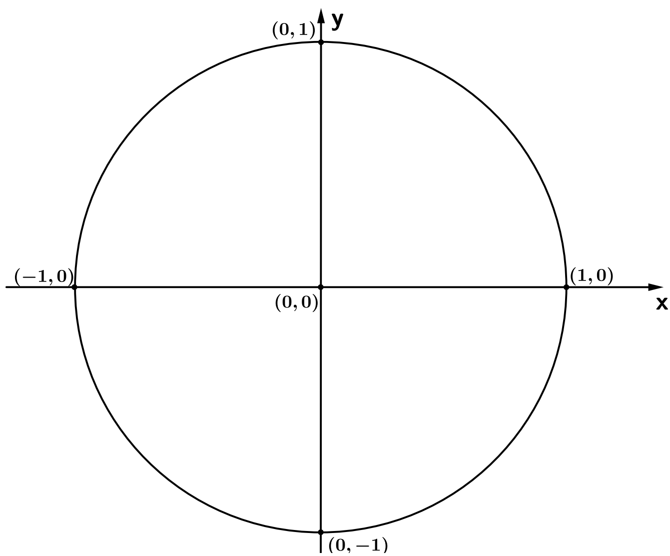


Figura 67: Pontos da circunferência que "cortam" os eixos x e y do sistema de coordenadas.

Por convenção, o ponto de coordenada (1,0) é considerado o ponto de origem dos arcos em uma circunferência trigonométrica. Também por convenção, a medida angular de um arco é positiva se o arco é tomado em sentido anti-horário e negativa se o arco é tomado em sentido horário.

Veja, então, que os pontos indicados na figura abaixo localizam no plano, respectivamente, os arcos de medida zero (0° ou 0 π rad); de um quarto (¼) de volta da circunferência (90° ou π/2 rad); de meia (½) volta da circunferência (180° ou π rad); de três quartos (¾) de volta da circunferência (270° ou 3π/2 rad); e de uma volta completa da circunferência (360° ou 2π rad):

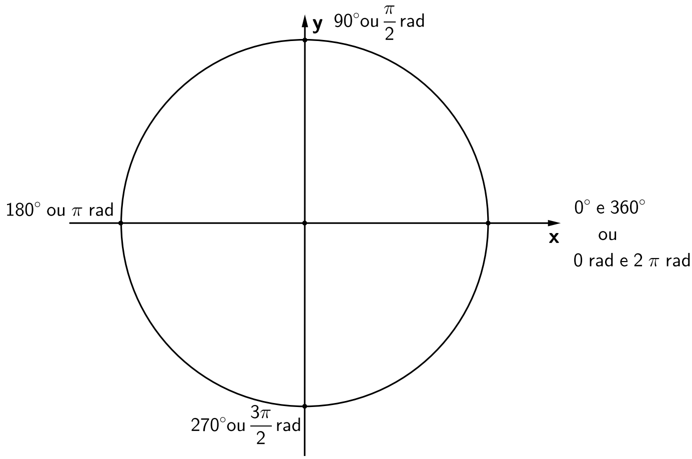


Figura 68: Arcos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360° na circunferência trigonométrica.

Com esse sistema de representação, dado pela circunferência trigonométrica, podemos localizar qualquer arco de circunferência no plano.

Vejamos, por exemplo, o arco MN abaixo. Se considerarmos o arco MN em sentido anti-horário (arco de cor azul), sua medida será de 30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad. Já se considerarmos o arco MN em sentido horário (arco de cor vermelha), sua medida será de -330° ou $\frac{-11\pi}{6}$ rad.

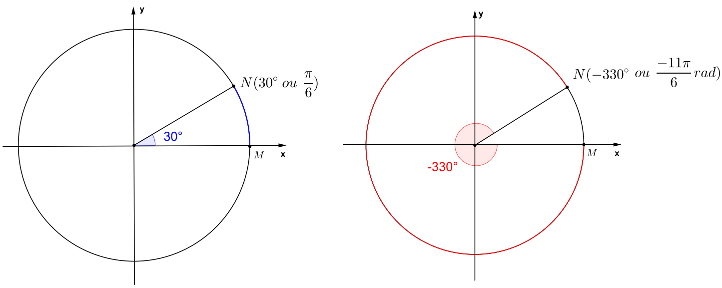


Figura 69: Arco de 30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad e arco de -330° ou $\frac{-11\pi}{6}$ rad na circunferência trigonométrica.

Aqui, talvez você esteja se questionando: Como tudo isso pode nos ajudar em relação às razões trigonométricas de ângulos maiores que 90°? Vamos lá!

Observe na circunferência trigonométrica a seguir o arco AB de medida igual a 43°.

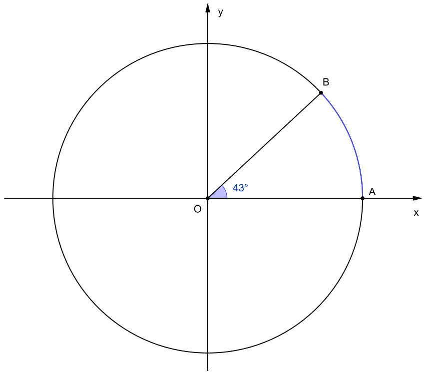


Figura 70: Arco $\widehat{AB}$ de medida igual a 43°.

É possível associar ao arco AB um triângulo retângulo na circunferência trigonométrica, tal como apresentamos:

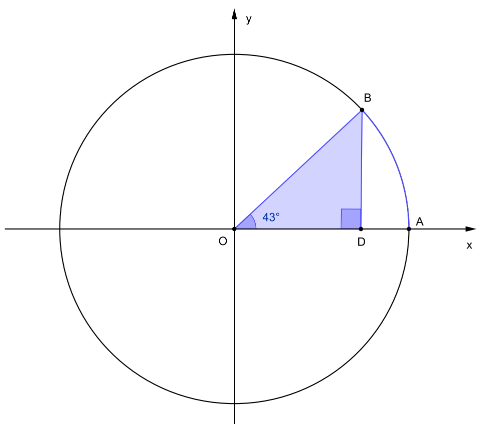


Figura 71: Triângulo retângulo a partir de um arco $\widehat{AB}$ de medida igual a 43°.

Veja que a hipotenusa é o segmento de reta que liga o centro da circunferência à extremidade do arco (ponto B) e que seu valor é a medida do raio, portanto, 1 unidade (lembre-se de que, por definição, a circunferência trigonométrica possui raio unitário). O cateto adjacente ao ângulo de 43° nesse triângulo tem medida igual ao valor da coordenada x do ponto B (projeção ortogonal de B no eixo x). De maneira análoga, o cateto oposto ao ângulo de 43° nesse triângulo tem medida igual ao valor da coordenada y do ponto B (projeção ortogonal de B no eixo y). Na figura abaixo, é possível ver que essas projeções valem 0,73 e 0,68, respectivamente:

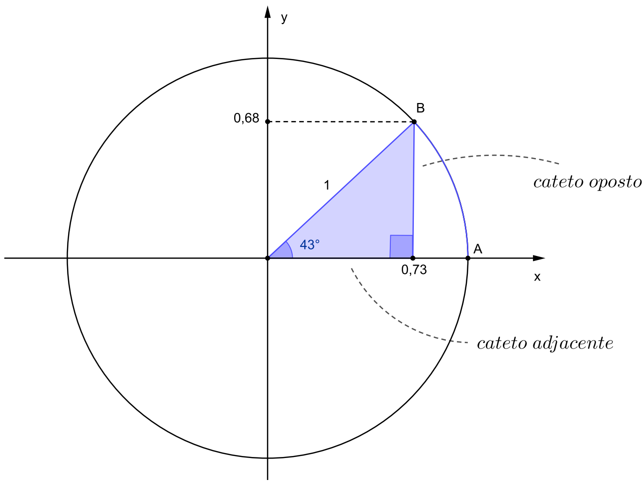


Figura 72: Triângulo retângulo a partir de um arco $\widehat{AB}$ de medida igual a 43° e projeção do ponto B nos eixos x e y.

Destacamos a seguir outro exemplo. Considere o arco CD de medida 70° e o triângulo retângulo associado a ele no círculo trigonométrico:

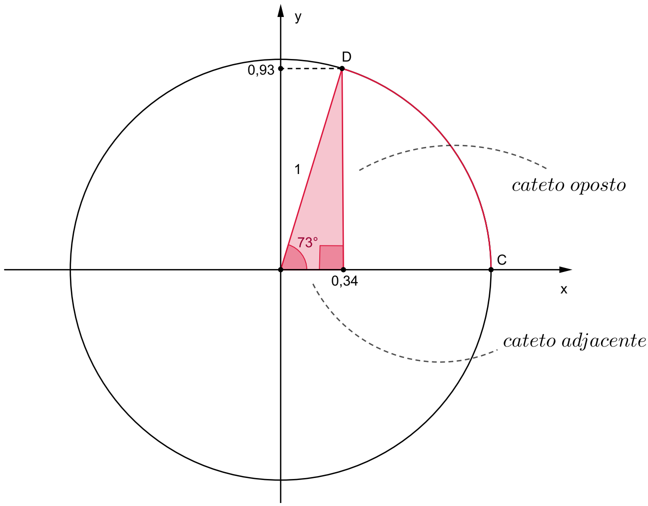


Figura 73: Triângulo retângulo a partir de um arco $\widehat{CD}$ de medida igual a 70° e projeção do ponto D, nos eixos x e y.

Novamente, a hipotenusa é o segmento de reta que liga o centro da circunferência à extremidade do arco (ponto D) e seu valor é a medida do raio, portanto, 1 unidade. O cateto adjacente ao ângulo de 70° nesse triângulo tem medida igual ao valor da coordenada x do ponto D (projeção ortogonal de D no eixo x), que é 0,34. De maneira análoga, o cateto oposto ao ângulo de 70° nesse triângulo tem medida igual ao valor da coordenada y do ponto D (projeção ortogonal de D no eixo y), que é 0,93.

Podemos, assim, associar a qualquer arco na circunferência trigonométrica um triângulo retângulo. É isso que nos permite calcular as razões trigonométricas de ângulos de quaisquer medidas. Logo chegaremos a elas! Antes, vejamos mais alguns exemplos de arcos na circunferência trigonométrica e os triângulos retângulos a eles associados.

Para tanto, importante ressaltar que esses triângulos retângulos sempre são construídos da seguinte forma: a) o segmento de reta que liga o centro da circunferência à extremidade do arco considerado será a hipotenusa; b) o segmento de reta que liga a extremidade do arco considerado ao ponto de sua projeção ortogonal no eixo x será o cateto oposto.

Considere o arco EF de medida 120°:

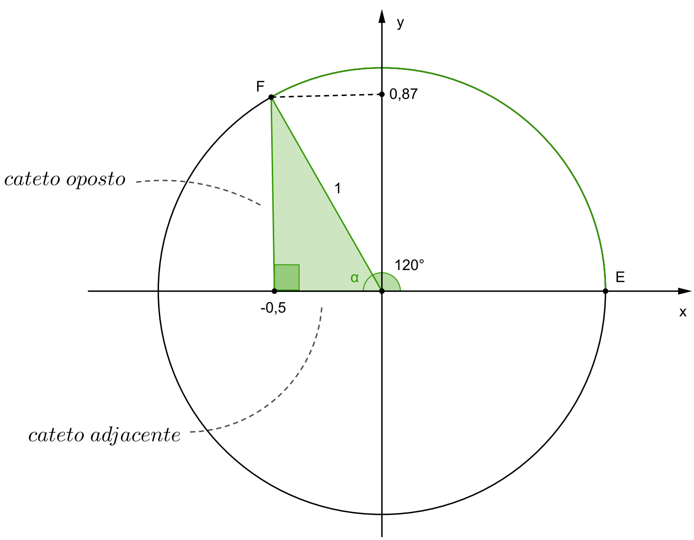


Figura 74: Triângulo retângulo a partir de um arco $\widehat{EF}$ de medida igual a 120° e projeção do ponto F, nos eixos x e y.

Agora observe o triângulo retângulo associado ao arco EF na circunferência trigonométrica. Veja que o ângulo α indicado tem medida de 60° (180° - 120°). A hipotenusa é o segmento de reta que liga o centro da circunferência à extremidade do arco (ponto F), e tem a medida do raio: 1 unidade. O cateto adjacente ao ângulo de 60° nesse triângulo tem medida igual ao valor da coordenada x do ponto F (projeção ortogonal de F no eixo x), que é -0,5. Note que o sinal é negativo pois seguimos a orientação do sistema de coordenadas[7]. Por sua vez, o cateto oposto ao ângulo de 60° nesse triângulo tem medida igual ao valor da coordenada y do ponto F (projeção ortogonal de F no eixo y), que é 0,87.

Vamos a mais um exemplo. Considere o arco GH de medida 225° e o triângulo retângulo associado a ele na circunferência trigonométrica:

[7] Efetivamente, uma medida não possui valor negativo. Estamos dizendo aqui que a medida do cateto assume valor negativo apenas em referência à sua posição na circunferência trigonométrica, cujos eixos são orientados. O mesmo acontece nos demais exemplos.

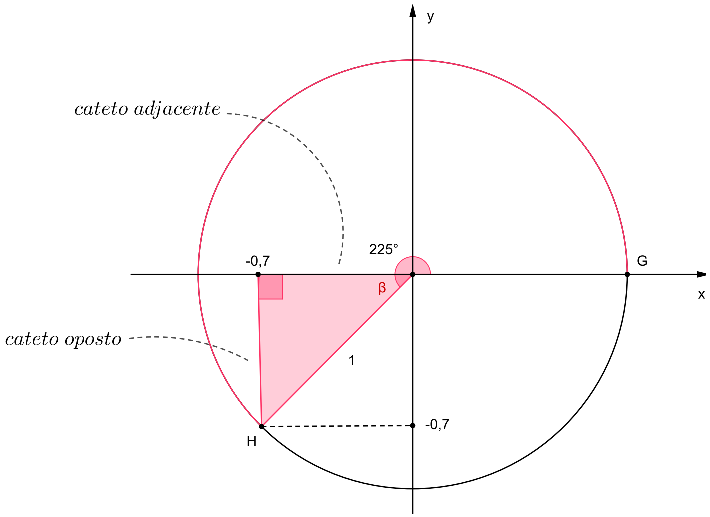


Figura 75: Triângulo retângulo a partir de um arco $\widehat{GH}$ de medida igual a 225° e projeção do ponto H, nos eixos x e y.

Como vimos anteriormente, a hipotenusa tem a medida do raio, portanto, 1 unidade. Veja que o ângulo β indicado mede 45° (225° - 180°). O cateto adjacente ao ângulo de 45° tem medida igual ao valor da projeção ortogonal de H no eixo x, que é -0,7. De maneira análoga, o cateto oposto tem medida igual ao valor da projeção ortogonal de H no eixo y, que é -0,7.

Por fim, considere o arco IJ de medida 300°.

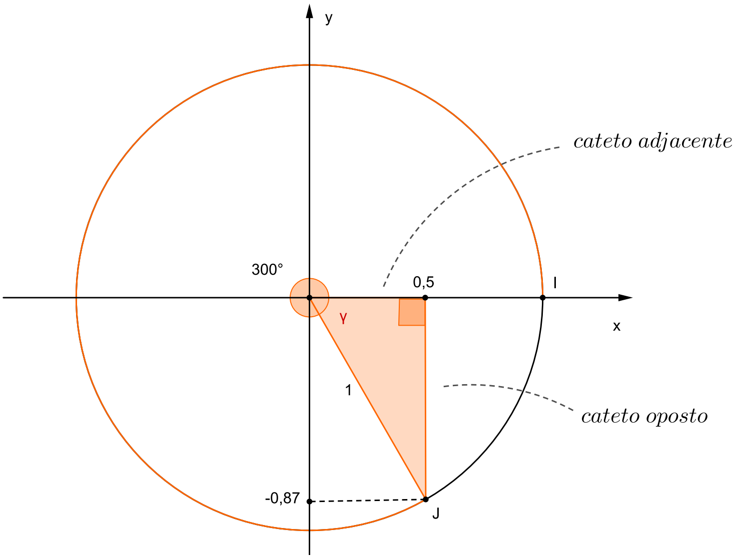


Figura 76: Triângulo retângulo a partir de um arco $\widehat{IJ}$ de medida igual a 300° e projeção do ponto J, nos eixos x e y.

Observe o triângulo retângulo associado a esse arco na circunferência trigonométrica. A hipotenusa tem valor igual à medida do raio: 1 unidade. Veja que o ângulo γ indicado tem medida de 60° (360° - 300°). O cateto adjacente ao ângulo de 60° tem medida igual ao valor da projeção de J no eixo x, que é 0,5. Da mesma forma, o cateto oposto tem medida igual ao valor da projeção de J no eixo y, que é -0,87.

Uma questão importante para a qual chamamos atenção agora é que os triângulos retângulos que construímos, associados a arcos do segundo, terceiro e quarto quadrantes, podem ser transpostos ("levados") para o primeiro quadrante. Dizemos, nesse caso, que o triângulo considerado e o triângulo transposto ao primeiro quadrante são **simétricos**.

Para entender um pouco melhor o conceito de simetria (ou espelhamento), basta olharmos o desenho abaixo, colocado no centro de uma folha de papel. Ao dobrar essa folha ao meio, no sentido vertical, o desenho estará dividido em duas partes simétricas (ou espelhadas):

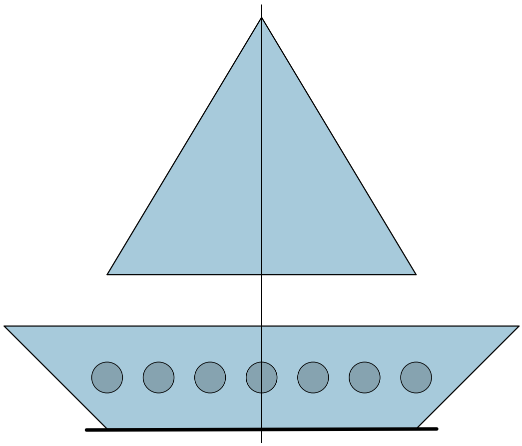


Figura 77: Exemplo de figura simétrica.

É como se a marcação da dobra funcionasse mesmo como um espelho (é um eixo de simetria), "rebatendo" uma parte do desenho na outra, em posições opostas e simétricas em relação ao eixo de simetria. Ou seja, as duas partes da figura são idênticas e seus pontos têm a mesma distância em relação ao eixo de simetria, de modo que uma fica “de frente para a outra”, considerando-se esse eixo!

É justamente o que acontece quando algo está sendo refletido em um espelho plano:

Figura 78: Imagem refletida em um espelho plano.

Usando essa ideia, é como se os eixos do círculo trigonométrico funcionassem como eixos de espelhamento (de simetria, ou de rebatimento), sendo possível “espelhar” (transpor) qualquer triângulo de um quadrante a outro. Para nossos estudos, como já indicamos, temos interesse em espelhar arcos do segundo, terceiro e quarto quadrantes no primeiro quadrante. Vejamos como isso acontece!

Por exemplo, na circunferência trigonométrica a seguir, temos a representação de um triângulo OBD associado a um arco AB, do segundo quadrante:

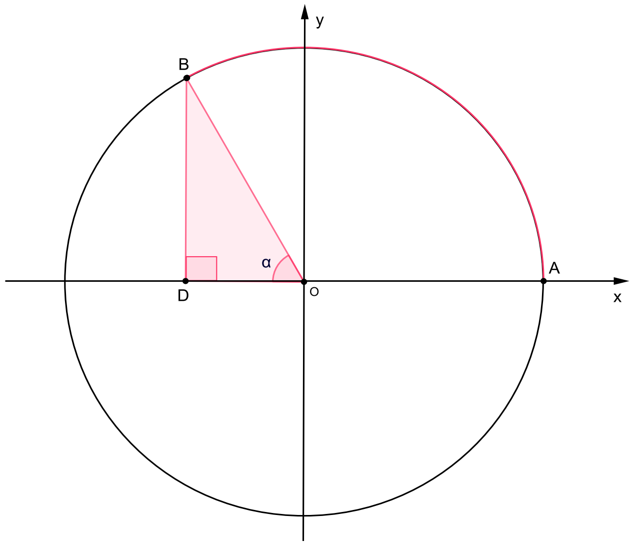


Figura 79: Triângulo associado a um arco AB, no segundo quadrante.

A seguir, espelhamos o triângulo OBD no primeiro quadrante. Neste caso, o eixo y funciona como eixo de espelhamento.

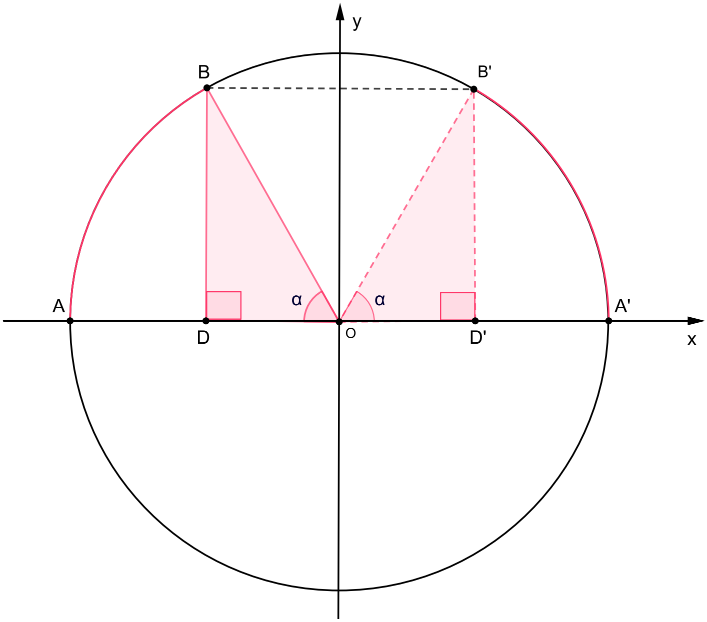


Figura 80: Espelhamento de um triângulo do segundo quadrante para o primeiro quadrante.

Na figura a seguir, o triângulo OHJ foi espelhado do quarto para o primeiro quadrante. Aqui, o eixo de espelhamento é o eixo x:

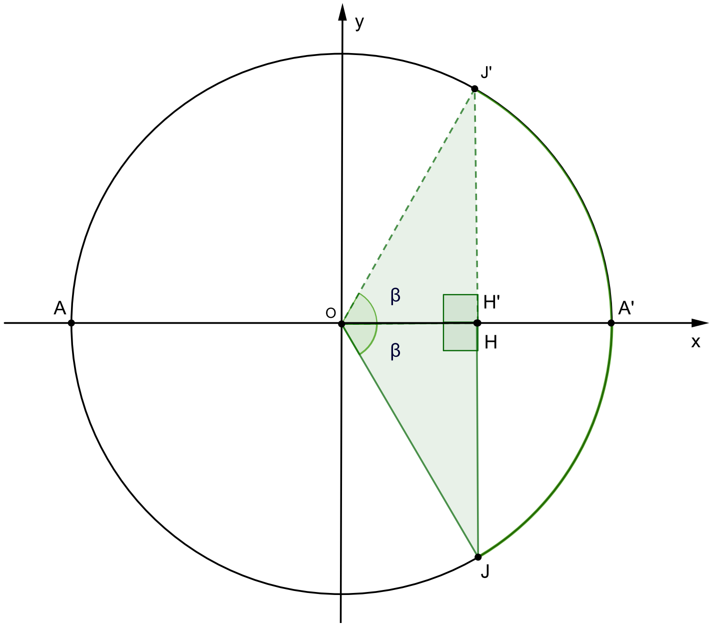


Figura 81: Espelhamento de um triângulo do quarto quadrante para o primeiro quadrante.

Podemos também espelhar um triângulo do terceiro quadrante para o primeiro quadrante. Nesse caso, operamos um duplo espelhamento. Primeiro transpomos esse triângulo para o segundo ou quarto quadrante e, posteriormente, fazemos o espelhamento para o primeiro quadrante. Por exemplo, temos a seguir o triângulo OEF espelhado primeiramente para o segundo quadrante e, posteriormente, para o primeiro:

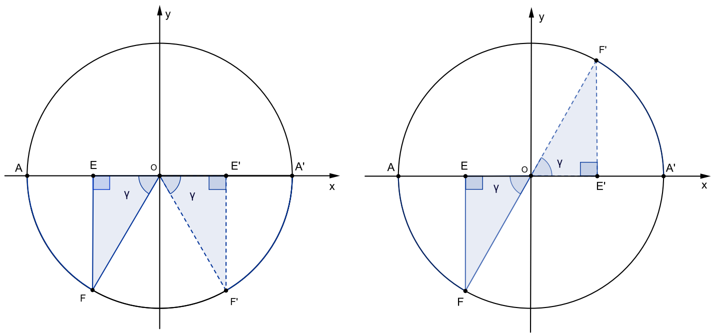


Figura 82: Espelhamento de um triângulo do terceiro quadrante para o primeiro quadrante.

Com isso, portanto, a todo arco na circunferência trigonométrica pode ser associado um arco correspondente (simétrico) no primeiro quadrante. Se considerarmos os arcos de 120°, 225° e 300° que apresentamos anteriormente (figuras 74, 75, 76), por exemplo, podemos dizer que, a partir do espelhamento no primeiro quadrante dos triângulos retângulos a eles associados, o arco de 120° corresponde ao arco de 30°, o arco de 225° corresponde ao arco de 45°, e o arco de 300° corresponde ao arco de 60°.

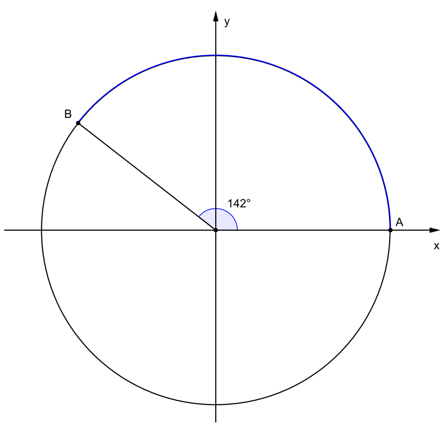
Esse processo de "espelhamento" de um arco para o primeiro quadrante é chamado de **redução de um arco ao primeiro quadrante**. Mas fique tranquilo! Não é necessário fazer a representação gráfica dessa situação sempre que se precisar reduzir um arco ao primeiro quadrante. Há uma regularidade nesse processo, possível de perceber nos exemplos já apresentados.

Para reduzir um arco do **segundo** ao primeiro quadrante, devemos diminuir de 180° (ou π rad) a medida angular (consideremos α) do arco em questão: **(180° - α)**. Já para reduzir um arco do **terceiro** ao primeiro quadrante, devemos diminuir 180° (ou π rad) da medida angular (consideremos β) do arco considerado: **(β - 180°)**. Por fim, para reduzir um arco do quarto ao primeiro quadrante, diminuímos de 360° (ou 2π rad) a medida angular (consideremos γ) do arco considerado: **(360° - γ)**.

Apresentamos alguns exemplos:

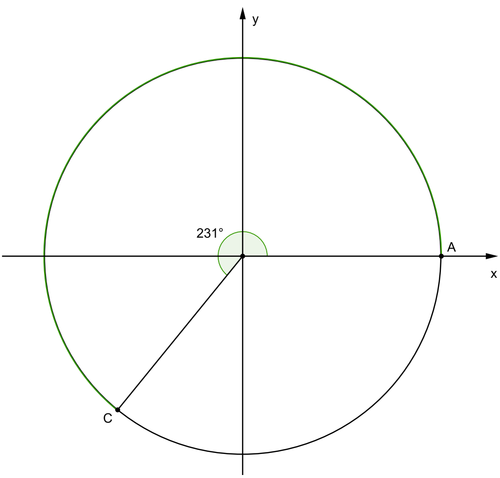
Redução ao primeiro quadrante

Exemplo 1: Reduzir o arco de 142° ao primeiro quadrante.



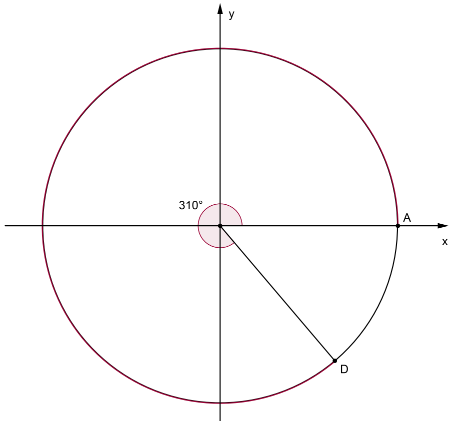
Esse arco está no 2° quadrante. Para reduzi-lo ao primeiro, diminuímos seu valor de 180°, resultando no arco de 38° (180° - 142° = 38°):

Exemplo 2: Reduzir o arco de 231° ao primeiro quadrante.



Esse arco está no 3° quadrante. Para reduzi-lo ao primeiro, diminuímos 180° do seu valor, resultando no arco de 51° (231° - 180 ° = 51°):

Exemplo 3: Reduzir o arco de 310° ao primeiro quadrante.



Nesse caso, o arco encontra-se no 4° quadrante. Para reduzi-lo ao primeiro quadrante, diminuímos seu valor de 360°, resultando no arco de 50° (360° - 310 ° = 50°).

Trigonometria na circunferência trigonométrica

Muito bem! Agora sabemos que a qualquer arco na circunferência trigonométrica podemos associar um triângulo retângulo. Sabemos, também, que as razões trigonométricas são definidas a partir dos lados de um triângulo retângulo, considerando-se um de seus ângulos agudos. Daí que, com o auxílio da circunferência trigonométrica, podemos calcular, portanto, as razões trigonométricas de qualquer ângulo! Vejamos como isso acontece com as três razões principais: o seno, o cosseno e a tangente.

Considere, tal como na figura a seguir, um arco AB de medida angular α na circunferência trigonométrica, e as projeções ortogonais do ponto B aos eixos x e y. Chamaremos os pontos das projeções nos eixos x e y de pontos D e C, respectivamente.

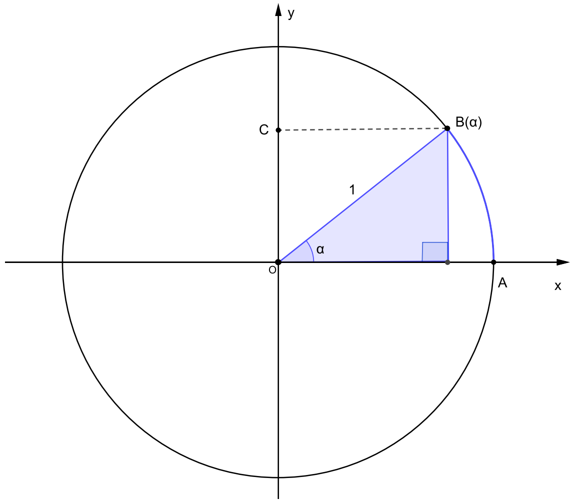


Figura 83: Triângulo retângulo associado a um arco AB em uma circunferência trigonométrica.

Com isso, já temos tudo o que precisamos para o cálculo das razões trigonométricas. Observe que o cateto oposto a α é o lado BD, o cateto adjacente a α é o lado OD e a hipotenusa é o lado OB, que mede 1, já que é o raio unitário da circunferência trigonométrica:

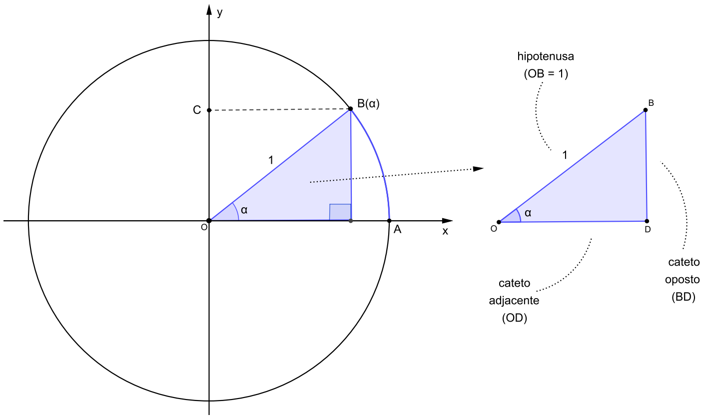


Figura 84: Triângulo retângulo associado a um arco AB em uma circunferência trigonométrica e seus catetos em relação ao ângulo α.

Ora, se, como vimos, o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, e, como na circunferência trigonométrica a hipotenusa do triângulo retângulo associado a um arco sempre mede 1, então, na circunferência trigonométrica, o seno de um ângulo α sempre será equivalente à medida do cateto oposto desse triângulo; já o cosseno de um ângulo α sempre será equivalente à medida do cateto adjacente desse triângulo. Percebeu a facilidade quanto aos cálculos, dada pela convenção de se tomar a circunferência com raio unitário?

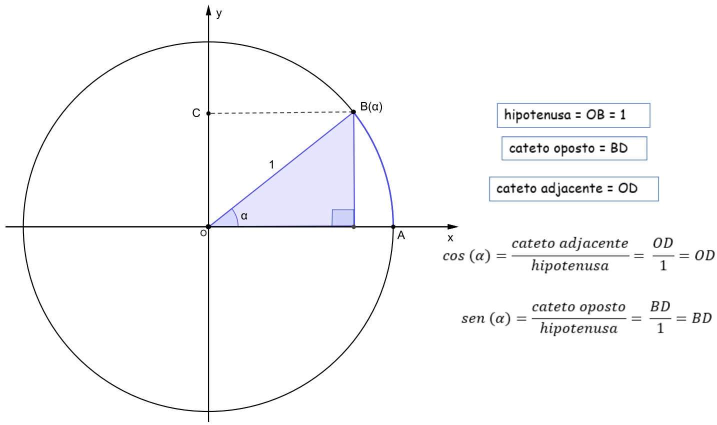


Figura 85: Razões seno e cosseno no triângulo retângulo associado a um arco AB na circunferência trigonométrica.

Por outro lado, observe, tal como já vimos anteriormente, que a medida do cateto adjacente corresponde ao valor da projeção ortogonal do ponto B no eixo x, ou seja, é o valor da coordenada x do ponto B; a medida do cateto oposto, por sua vez, corresponde ao valor da projeção ortogonal do ponto B no eixo y, ou seja, corresponde ao valor da coordenada y do ponto B.

Dessa forma, temos que, na circunferência trigonométrica, os valores de **cosseno** de um ângulo α são dados sempre pelo valor da projeção ortogonal do ponto B (extremidade do arco) no **eixo x** (por isso, também chamado de **eixo dos cossenos**); e os valores de seno de um ângulo α são dados sempre pelo valor da projeção ortogonal do ponto B (extremidade do arco) no **eixo y** (por isso, também chamado de **eixo dos senos**):

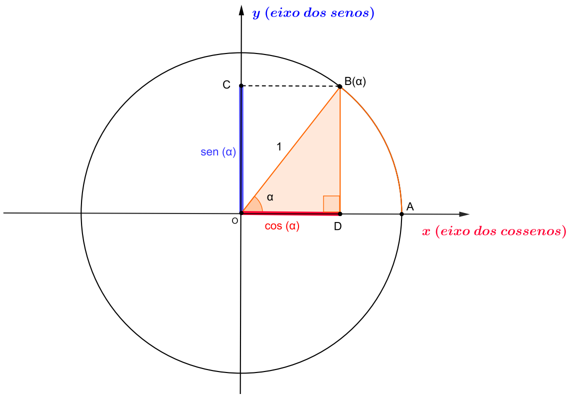


Figura 86: Seno é o valor da projeção da extremidade do arco no eixo y e cosseno é o valor da projeção da extremidade do arco no eixo x.

Consideremos, por exemplo, um arco de 40°. A projeção de sua extremidade no eixo x é 0,7660; no eixo y é 0,6428. Logo, temos que cos(40°) = 0,7660 e sen(40°) = 0,6428 (Por curiosidade, consulte a tabela trigonométrica que apresentamos na p. 41, e verifique esses valores!):

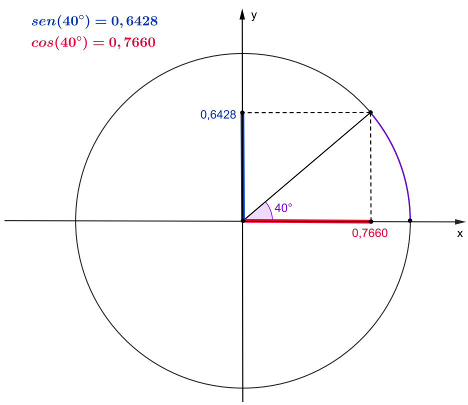


Figura 87: Razão seno e cosseno de 40° na circunferência trigonométrica.

Consideremos agora um arco de 220° e vejamos a projeção de sua extremidade nos eixos x e y. A projeção da extremidade no eixo y é -0,6428; e a projeção da extremidade no eixo x é -0,7660. Logo, podemos dizer que sen(220°) = -0,6428 e cos(220°) = -0,7660.

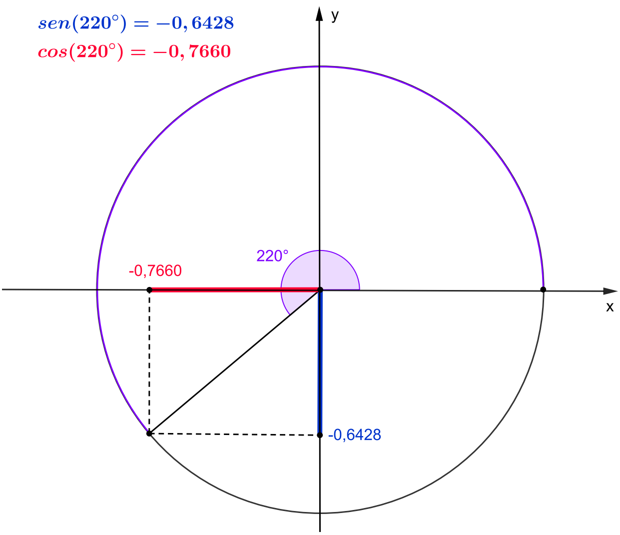


Figura 88: Razão seno e cosseno de 220° na circunferência trigonométrica.

Veja que os valores do seno e do cosseno dos ângulos de 40° e 220° têm o mesmo valor, a menos do sinal. Isso se dá justamente porque, em função da redução de um arco ao primeiro quadrante, o arco de 220° tem como arco correspondente o arco de 40°. O sinal difere, entretanto, porque os arcos de 40° e 220° estão em quadrantes distintos. Portanto, embora as projeções de suas extremidades nos eixos tenham o mesmo tamanho, seus sinais variam de acordo com o quadrante em que se encontram.

Assim sendo, no primeiro quadrante, os valores de seno e cosseno sempre são positivos, já que as projeções da extremidade de um arco desse quadrante sempre se dão na parte positiva de ambos os eixos:

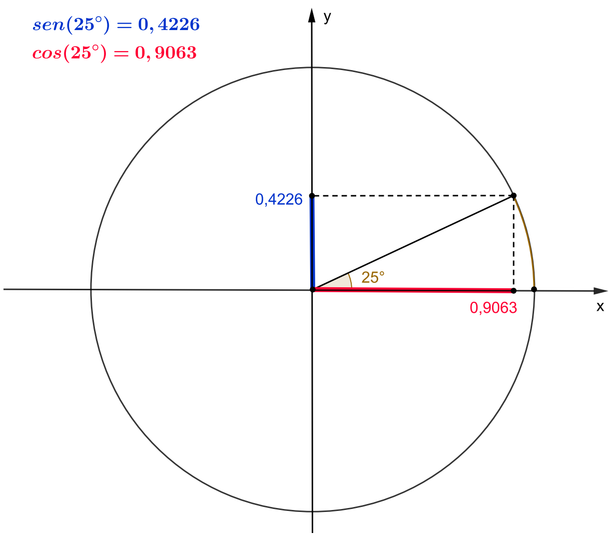


Figura 89: Razão seno e cosseno de 25° na circunferência trigonométrica.

Já no segundo quadrante, os valores de seno são positivos, mas os valores de cosseno são negativos, já que um arco desse quadrante sempre tem a projeção de sua extremidade com valor positivo no eixo y e negativo no eixo x:

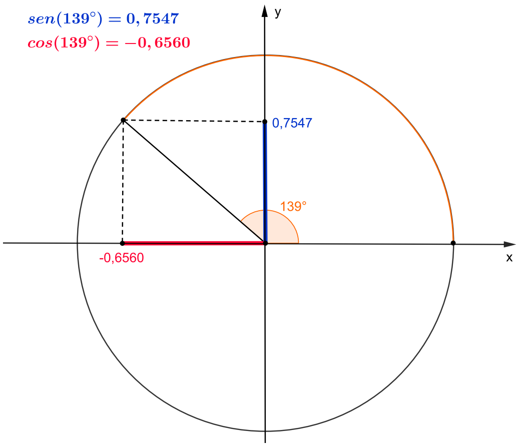


Figura 90: Razão seno e cosseno de 139° na circunferência trigonométrica.

No terceiro quadrante, os valores de seno e cosseno sempre são negativos, já que as projeções da extremidade de um arco desse quadrante sempre se dão na parte negativa de ambos os eixos.

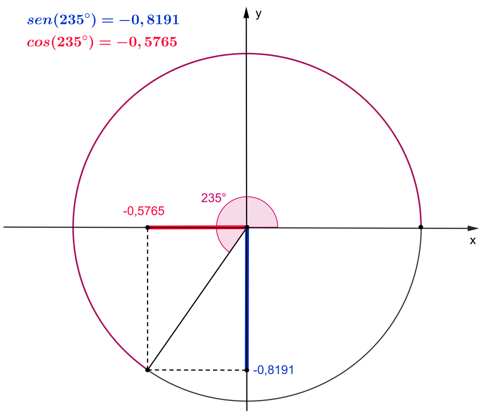


Figura 91: Razão seno e cosseno de 235° na circunferência trigonométrica.

Por fim, no quarto quadrante, os valores de seno são negativos, mas os valores de cosseno são positivos, já que um arco desse quadrante sempre tem a projeção de sua extremidade com valor negativo no eixo y e positivo no eixo x:

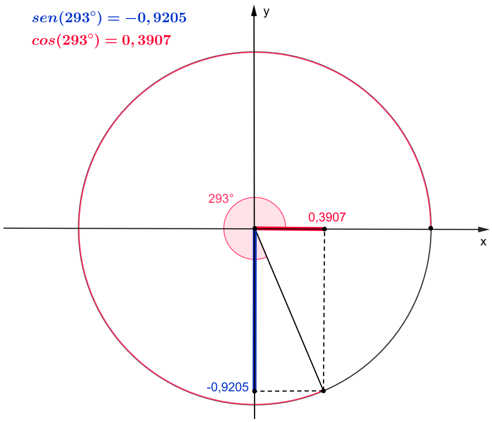


Figura 92: Razão seno e cosseno de 293° na circunferência trigonométrica.

Sintetizamos na figura abaixo os sinais de seno e cosseno nos diferentes quadrantes:

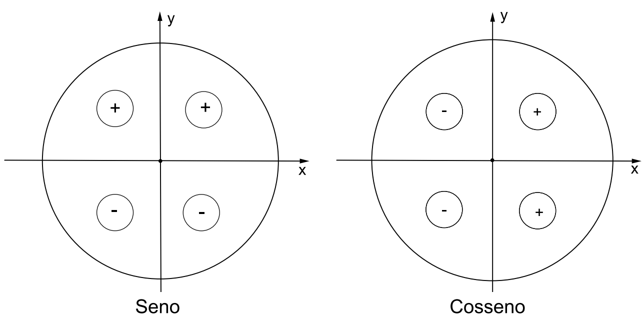


Figura 93: Sinais de seno e cosseno em cada quadrante.

Vale também atentar para outro fato importante: os valores de seno e cosseno de um ângulo variam sempre entre -1 e 1. Isso acontece porque o seno e o cosseno são razões entre os catetos oposto e adjacente, respectivamente, e a hipotenusa, lembra-se? Como a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo e, portanto, sempre maior do que os catetos, essas razões, obrigatoriamente, devem estar compreendidas entre 0 e 1. Na circunferência trigonométrica, no entanto, em função da posição do arco nos quadrantes, os valores das projeções de sua extremidade podem estar nas partes negativas dos eixos e é por isso, então, que a variação se dá entre -1 e 1.

Além disso, chamamos atenção para os valores de seno e cosseno dos ângulos de 0° ou 360° (0 rad ou 2π rad); 90° ($\frac{\pi}{2}$rad); 180° (π rad); e 270° ($\frac{3\pi}{2}$rad). Observe que os valores de seno e cosseno nesses casos é dado pelo valor das coordenadas dos pontos em que o círculo "corta" os eixos:

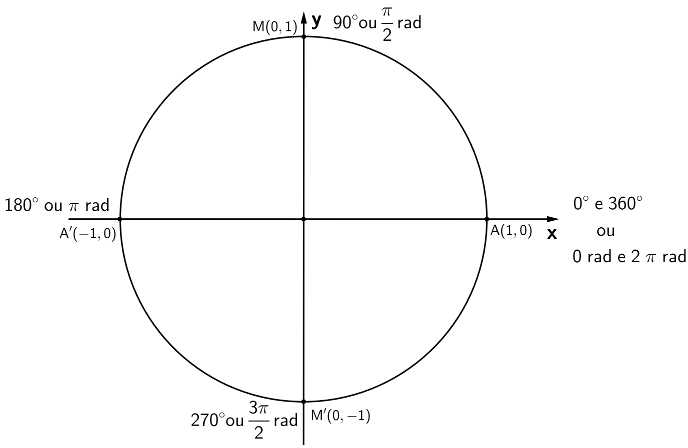


Figura 94: Valores das razões seno e cosseno de 0° ou 360°, 90°, 180° e 270°.

A tabela abaixo sintetiza essas informações:

	0° ou 0 rad	90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad	180° ou π rad	270° ou $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° ou 2 π rad
seno	0	1	0	-1	0
cosseno	1	0	-1	0	1

Tabela 3: Valores das razões seno e cosseno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

Para finalizar esta seção, vamos agora olhar para a razão tangente na circunferência trigonométrica. A tangente é dada pela razão entre os catetos oposto e adjacente de um triângulo retângulo, ao se considerar um dos seus ângulos agudos.

Pois bem. Vimos há pouco a conveniência em se trabalhar com triângulos retângulos cuja hipotenusa tenha medida igual a 1, para o cálculo de senos e cossenos, não é mesmo? Pensando no cálculo da tangente, seguindo a mesma ideia, é conveniente agora trabalhar com triângulos retângulos cujo cateto adjacente tenha medida unitária. Isso porque, uma vez que a tangente é definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, se o cateto adjacente tiver medida igual a 1, o valor da tangente será a própria medida do cateto oposto do triângulo considerado:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{1} = \textit{cateto oposto}$$

Assim, perceba que no cálculo da tangente de um ângulo na circunferência trigonométrica não é vantajoso usar o mesmo triângulo retângulo que usamos para o cálculo do seno e do cosseno desse ângulo. Nesse caso, devemos trabalhar com um triângulo semelhante a este, de forma que o cateto adjacente tenha a medida do raio da circunferência, ou seja, 1 unidade.

Para encontrarmos esse triângulo semelhante desejado, traçamos um novo eixo (em vermelho na figura abaixo), tangente à circunferência e paralelo ao eixo y, passando pelo ponto A, que é considerado o ponto de origem dos arcos. Por convenção, chamamos esse novo eixo de **eixo t**. Considere um arco AM e o triângulo retângulo OMN, formado a partir da projeção da extremidade do arco (ponto M) nos eixos x e y:

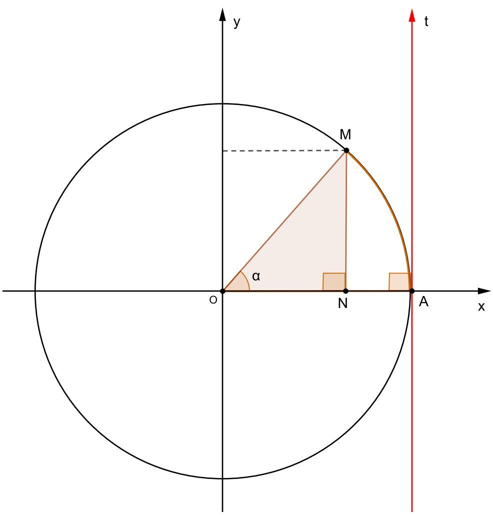


Figura 95: Eixo t, tangente à circunferência.

Veja que basta estender a hipotenusa do triângulo OMN, até que ela "corte" o novo eixo no ponto T, para encontrarmos o triângulo semelhante desejado:

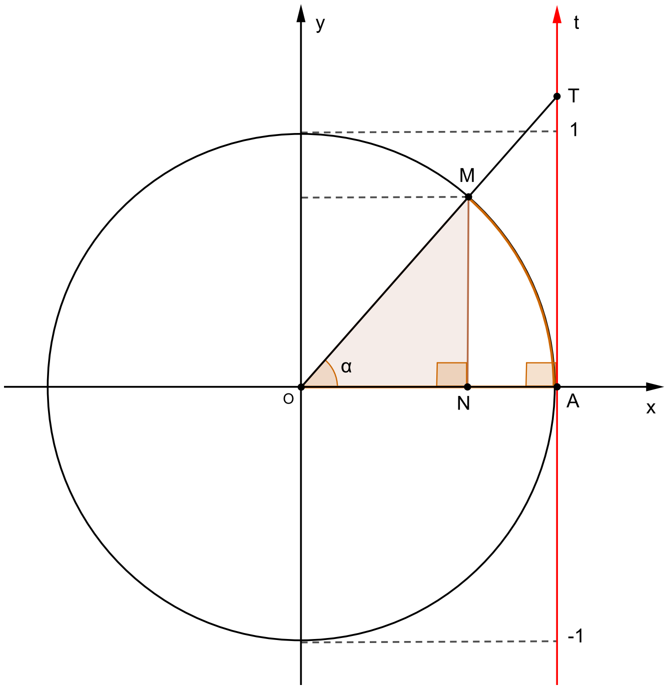


Figura 96: Prolongamento de OM até o eixo t.

Os triângulos OMN e OTA são, portanto, triângulos semelhantes (já vimos que triângulos retângulos que possuem ângulos de medidas comuns são semelhantes). E, além disso, considerando-se o ângulo α, o triângulo OTA tem cateto adjacente (OA) de medida unitária (já que o raio da circunferência trigonométrica é igual a 1), que é justamente o que procurávamos. Assim, a medida da tangente do ângulo α será igual à medida do cateto oposto do triângulo OTA, que é exatamente AT:

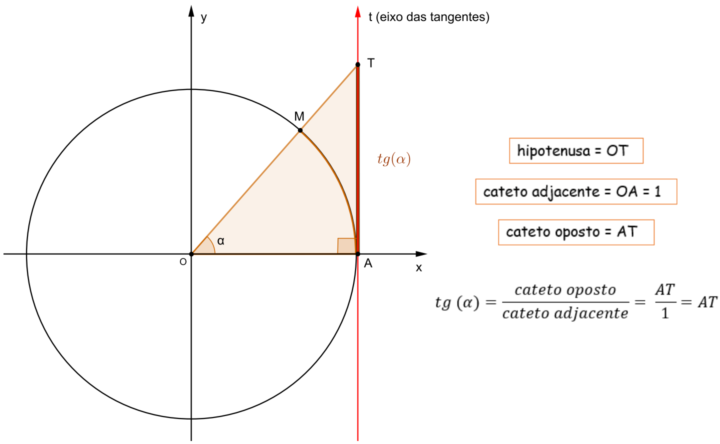


Figura 97: Razão tangente na circunferência trigonométrica.

Dessa forma, o valor da tangente de um ângulo na circunferência trigonométrica sempre será dado nesse novo eixo t considerado e é por isso que esse eixo é chamado de **eixo das tangentes**:

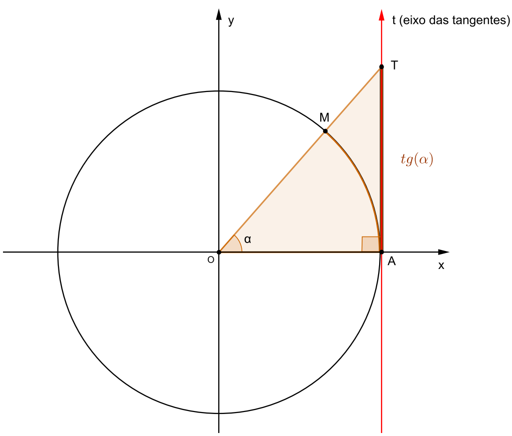


Figura 98: Eixo das tangentes.

Perceba que, diferentemente das razões seno e cosseno, que têm valores variando entre -1 e 1, a razão tangente pode assumir qualquer valor. Isso porque, a razão tangente é definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo. Uma vez que os catetos podem ter quaisquer medidas, o valor da tangente não fica limitado a nenhum intervalo.

Além disso, é importante destacar que existem ângulos que não admitem valor para tangente. Como vimos anteriormente, a tangente de um ângulo também pode ser dada pela razão entre o seno e o cosseno desse ângulo. Se o valor do cosseno for igual a zero, não é possível calcular essa razão. Isso acontece com os arcos de 90° ($\frac{\pi}{2}$rad) e 270° ($\frac{3\pi}{2}$rad)!

Vejamos agora qual é o sinal do valor da tangente, de acordo com a posição dos arcos no círculo trigonométrico. Primeiramente, destacamos que o eixo das tangentes é orientado em sentido crescente, de baixo para cima.

Com isso, para arcos do primeiro quadrante, os valores da tangente são positivos. Veja que, realizando o processo que descrevemos anteriormente, ao se estender o segmento que liga o centro da circunferência trigonométrica à extremidade do arco (que é a hipotenusa do triângulo retângulo associado ao arco) até o eixo das tangentes, estaremos sempre na parte positiva do eixo. Observe a figura a seguir, em relação ao arco AN:

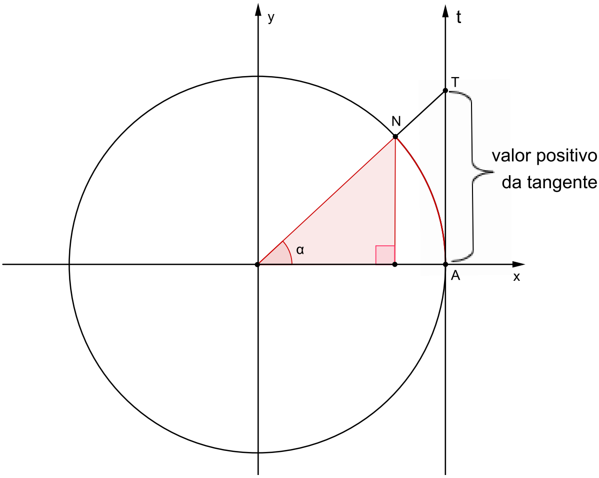


Figura 99: Valor positivo da tangente para arcos do primeiro quadrante.

Igualmente, para arcos do terceiro quadrante, os valores da tangente sempre serão positivos. Observe:

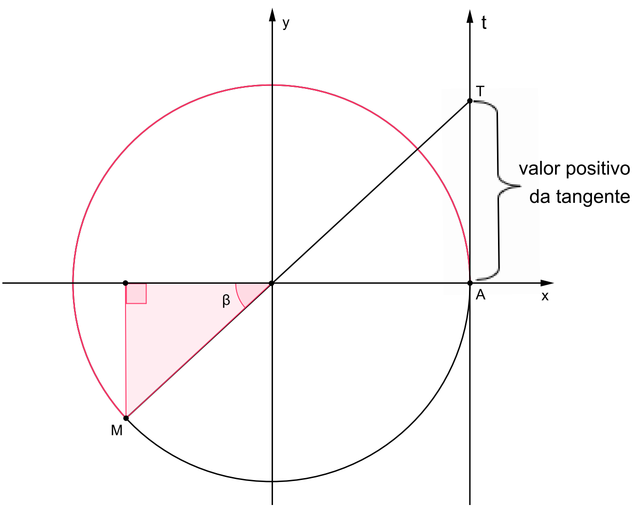


Figura 100: Valor positivo da tangente para arcos do terceiro quadrante.

Já para arcos do segundo e quarto quadrantes, os valores da tangente são sempre negativos. Ao se estender o segmento que liga o centro da circunferência trigonométrica à extremidade do arco até o eixo das tangentes, estaremos sempre na parte negativa do eixo. Observe as figuras abaixo:

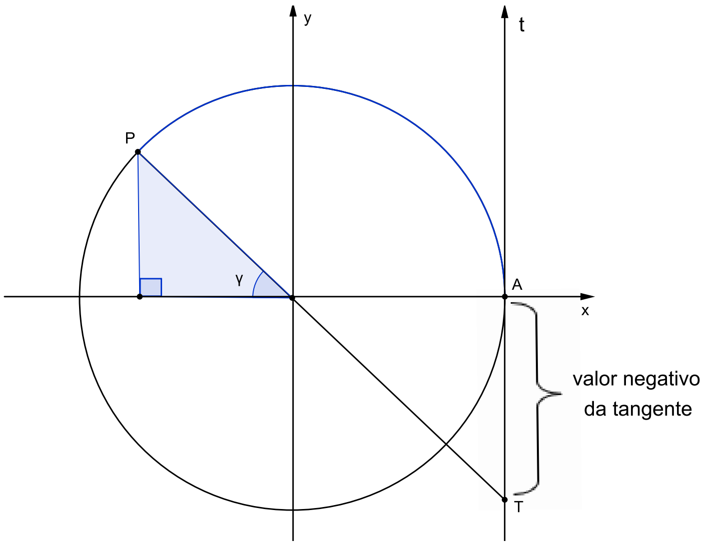


Figura 101: Valor negativo da tangente para arcos do segundo quadrante.

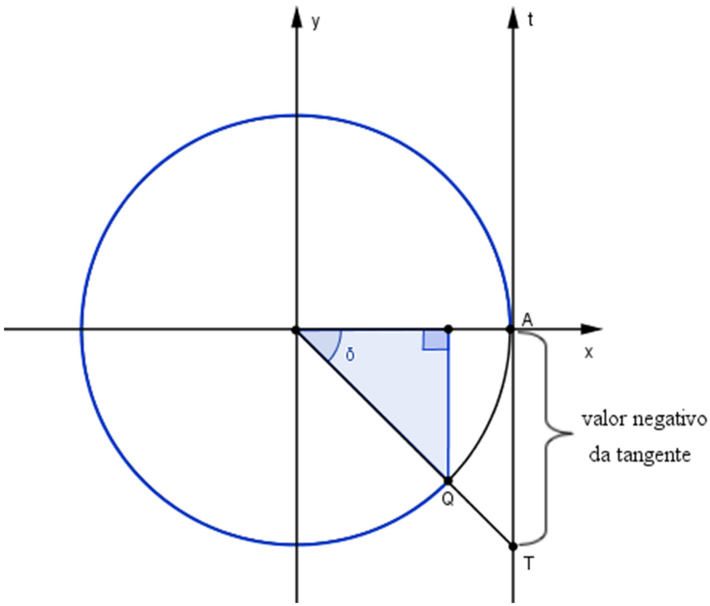


Figura 102: Valor negativo da tangente para arcos do quarto quadrante.

Em resumo, os sinais da tangente na circunferência trigonométrica são positivos para arcos do primeiro e terceiro quadrantes. E são negativos para arcos do segundo e quarto quadrantes:

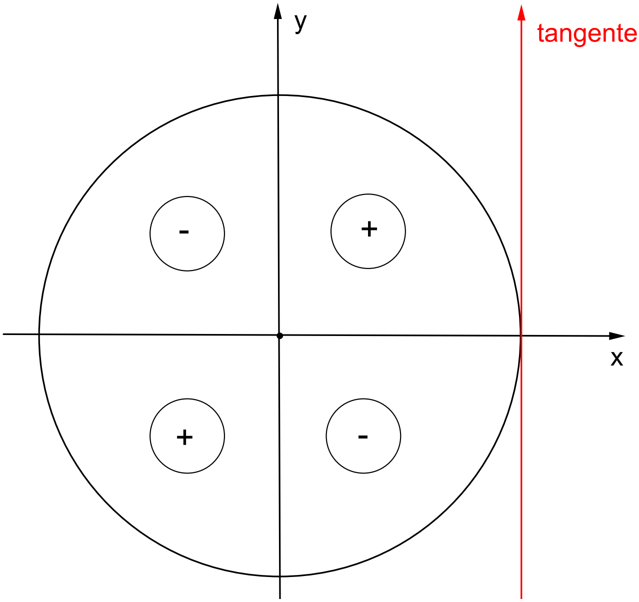
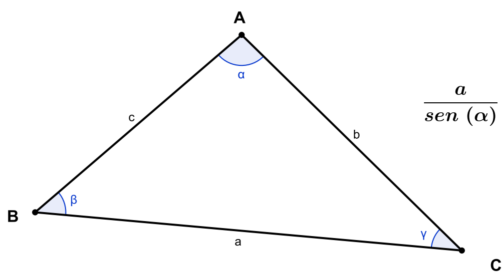


Figura 103: Sinais da tangente em cada quadrante.

Razões trigonométricas em triângulos quaisquer

Agora que sabemos como encontrar as razões trigonométricas de qualquer ângulo, podemos indicar duas leis trigonométricas muito importantes: a **lei dos senos** e a **lei dos cossenos**. Essas leis valem não apenas para triângulos retângulos, mas para quaisquer tipos de triângulos!

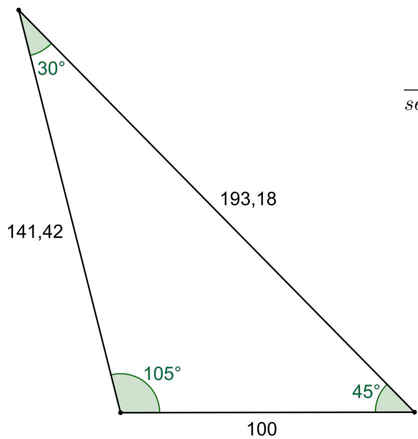
A **lei dos senos** estabelece a equivalência de razões entre as medidas dos lados de um triângulo e os senos dos ângulos opostos a esses lados. Assim, dado um triângulo qualquer ABC, a lei dos senos garante que:



$$\frac{a}{sen\ (\alpha)} = \frac{b}{sen\ (\beta)} = \frac{c}{sen\ (\gamma)}$$

Figura 104: Lei dos senos.

Se dividirmos, então, o valor da medida de cada lado de um triângulo qualquer pelo valor do seno do ângulo oposto ao lado considerado, encontraremos sempre as mesmas razões. No triângulo abaixo, por exemplo, cujas medidas dos lados e dos ângulos estão indicadas, veja que essas razões são, de fato, constantes:



$$\frac{100}{sen(30°)} = \frac{193,18}{sen(105°)} = \frac{141,42}{sen(45°)}$$

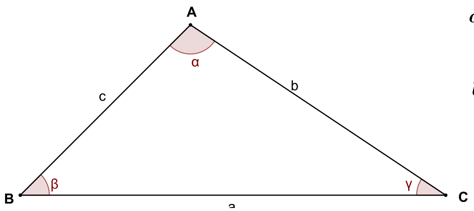
$$\frac{100}{0,5} = \frac{193,18}{0,9659} = \frac{141,42}{0,7071}$$

$$200 = 200 = 200$$

Figura 105: Exemplo de aplicação da lei dos senos.

Já a **lei dos cossenos** estabelece que, em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.

Em um triângulo qualquer é possível estabelecer três relações a partir desse teorema (uma para cada lado), como mostra a figura a seguir:



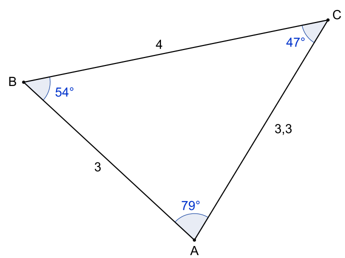
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, cos(\gamma)$$

Figura 106: Lei dos cossenos.

Dado o triângulo abaixo, cujas medidas dos lados e dos ângulos estão indicadas, veja como é possível aplicar a lei dos cossenos considerando-se cada um dos seus lados (Verifique com uma calculadora esses valores!):



$$4^2 = 3,3^2 + 3^2 - 2 \,.\, 3,3 \,.\, 3 \,.cos(79°)$$

$$3,3^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \,.\, 4 \,.3 \,.\, cos(54°)$$

$$3^2 = 4^2 + 3,3^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, 3,3 \,.\, cos(47°)$$

Figura 107: Exemplo lei dos cossenos.

Vale reforçar, mais uma vez, que a lei dos senos e a lei dos cossenos valem para qualquer triângulo, incluindo triângulos retângulos!

Além disso, importante também destacar que o teorema de Pitágoras (falamos dele na página 42, está lembrado?), na verdade, é um caso particular da lei dos cossenos. Consideremos o triângulo a seguir:

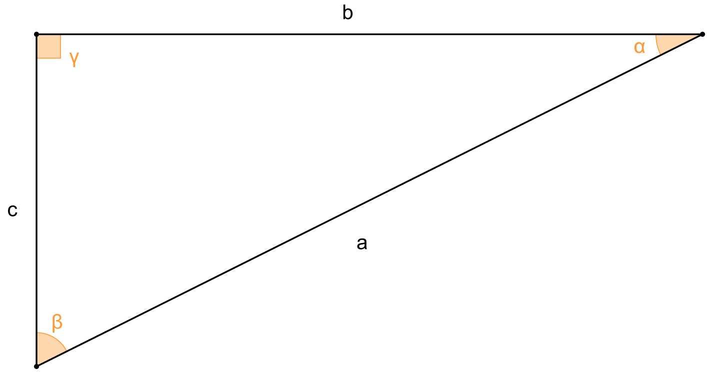


Figura 108: Exemplo de triângulo retângulo.

Pela lei dos cossenos, podemos estabelecer que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\gamma)$$

Uma vez que a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e que o cosseno de 90° é igual a 0 (zero), substituindo esse dado na lei dos cossenos, encontramos exatamente o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(90°)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos 0$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 0$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

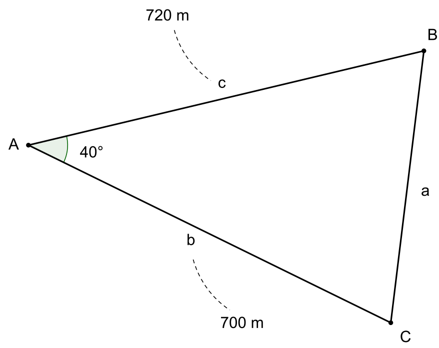
Interessante, não é mesmo? Equipados com todo esse ferramental dado pelos conhecimentos em trigonometria que vimos até aqui, podemos resolver inúmeros problemas práticos e teóricos de situações envolvendo triângulos. A título de ilustração, considere o exemplo a seguir:

Exemplo

Um geólogo está levantando dados para a construção de um túnel, que foi liberado para atravessar uma montanha, pertencente a uma área de proteção ambiental. Ele precisa determinar qual será o comprimento desse túnel. Como a montanha está localizada em uma região sem sinal de telefonia móvel, o geólogo dispõe, localmente, apenas de um mapa antigo sem escala, uma calculadora, um teodolito (instrumento utilizado para encontrar medida de ângulos), uma corda graduada de longa extensão e dois ajudantes.

Após estudar o terreno e definir a localização do túnel, o geólogo posiciona seus ajudantes nos pontos B e C, em lados opostos à montanha (marcados no mapa). Segue então para o ponto A, de onde consegue determinar sua distância até os ajudantes, com o auxílio da corda graduada. Desse modo, consegue determinar as distâncias da sua posição (ponto A) até os pontos B e C: respectivamente, 720 metros e 700 metros. Verifica, também, com a ajuda do teodolito, que o ângulo entre as semirretas AB e AC mede 40°.

Com essas informações, o geólogo esboça a seguinte figura:



Disso, ele precisa agora calcular a medida do lado a (segmento de reta BC) do triângulo. Utilizando a lei dos cossenos, e sabendo (utilizando a calculadora de que dispõe) que o cosseno do ângulo de 40° é aproximadamente 0,7660444431 (a precisão é importante nesse tipo de projeto, por isso a maior quantidade de casas decimais), realiza o seguinte cálculo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, \cos(40°)$$

$$a^2 = 700^2 + 720^2 - 2 \,.\, 700 \,.\, 720 \,.\, 0{,}7660444431$$

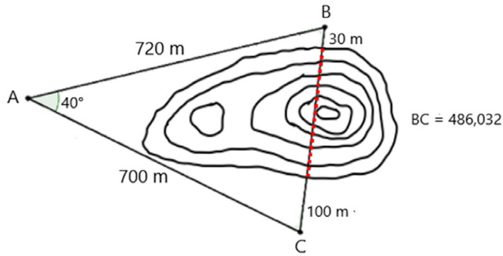
$$a^2 = 490000 + 518400 - 772172{,}7986$$

$$a^2 = 1008400 - 772172{,}7986 \cong 236227{,}2014$$

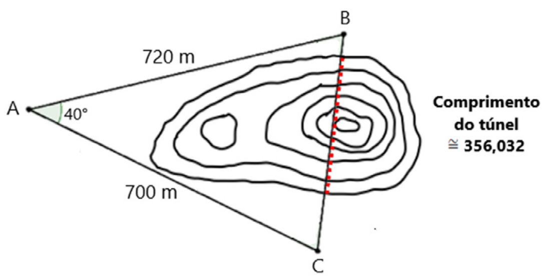
$$a = \sqrt{236227{,}2014} \cong 486{,}032$$

Ou seja, o lado a (B até C) mede aproximadamente 486,032 metros.

Pronto! Está resolvido o problema! Para finalmente encontrar a medida que procura, do comprimento do túnel, basta que o geólogo repasse os dados do esboço para o mapa antigo. Faz, então, uma linha tracejada (indicada em vermelho na figura), através da montanha, para indicar por onde o túnel passará:



A distância entre os pontos B e C é de 486,032 metros. Entretanto, há uma distância de 30 metros entre o ponto B e a montanha, e uma distância de 100 metros entre o ponto C até a montanha. Subtraindo esses valores, ele obtém o comprimento do túnel, que é de aproximadamente 356,032 metros (486,032 – 30 – 100 = 356,032).



Vemos, portanto, que mesmo sem empregar equipamentos tecnológicos avançados, tal como um GPS acoplado a um teodolito ou um taqueômetro, o geólogo pôde realizar essa tarefa, confiando nos seus bons e velhos conhecimentos de trigonometria!

Curiosamente, acredita-se que um exemplo semelhante a esse tenha ocorrido na Grécia Antiga, no século VI a.C., quando foi construído o aqueduto de Eupalinos, na forma de um túnel de 1.036 metros, na cidade de Samos. Um fato que o torna único foi ter sido aberto a partir de ambos os lados, encontrando-se exatamente ao meio. Uma proeza técnica que atrai turistas a visitá-lo até os dias de hoje!

ALGUMAS PALAVRAS FINAIS…

Encerrada esta apresentação de alguns dos principais conceitos relacionados à trigonometria, esperamos que este material possa cumprir com os objetivos para os quais foi pensado: constituir-se em um rico material de apoio para o estudo de trigonometria, contribuindo para a formação de tradutores e intérpretes de Libras, professores que ensinam Matemática, estudantes e qualquer pessoa interessada neste tema!

Convidamos o leitor a acompanhar os trabalhos do **Gepam (gepam.ufsc.br)** e a conhecer os materiais e cursos de formação em Matemática que temos desenvolvido, resultado de nossos estudos e pesquisas, no esforço de problematização das relações entre alteridade e educação matemática.